Miscelánea Matemática **38** (2003) 1–14 SMM

La distribución Delta

(In memoriam Laurent Schwartz)

Juan Antonio Pérez
Centro Regional de Estudios Nucleares
Universidad Autónoma de Zacatecas
japerez@cantera.reduaz.mx

La función delta de Dirac representó durante la primera mitad del siglo XX, un reto de la Física a la Matemática. Disciplinas como la Mecánica Cuántica, necesitadas de una "función impulso" con propiedades muy específicas, y con poco sustento matemático, hubieron de esperar hasta 1950 para que el joven de 35 años Laurent Schwartz, resolviera la cuestión, formulando además con ello la Teoría de Distribuciones, proveyendo de métodos eficientes y novedosos al Análisis Matemático. Véase por ejemplo Arfken [1],pp 69, 412-418, aunque se han incluido una buena cantida de referencias en las que se alude a la "función impulso", tales como [2], [3], [6], [7], [8] y [11]. En el presente trabajo se describen las dificultades formales por las que hubo de atravesar la delta de Dirac antes de convertirse en un concepto matemático respetable, así como el trabajo de Laurent Schwartz [15] que autentifica su pertenencia al mundo de la Matemática. Vaya ésto como un humilde homenaje al hombre.

Los datos biográficos de la sección 1 han sido tomados fundamentalmente de Chandrasekharan [5]. La exposición de la Teoría de Distribuciones sigue básicamente la que se puede encontrar en Zemanian [17], y como referencias adicionales se han incluído los excelentes textos [9], [10], [12], [14] además del original histórico [15].

1. Una vida ejemplar.

Laurent Schwartz nace el 5 de marzo de 1915 en París, obtiene la *medalla Fields* debido a su *Teoría de Distribuciones* en 1950, y muere el 4 de julio de 2002. Schwartz obtuvo una larga lista de premios, honores y medallas, entre los que destacan en 1955, 1964 y 1972 el *Grand Prix* de la Academia de Ciencias de París, siendo electo miembro de la misma Academia en 1972. Obtuvo doctorados honoris causa de una nutrida cantidad de universidades, que incluye Humboldt en 1960, Bruselas en 1962, Lund en 1981, Tel-Aviv en 1981, Montreal en 1985 y Atenas en 1993. En 1966 inauguró el Centro de Matemáticas de la Escuela Politécnica y permaneció como su director hasta 1983. A partir de 1980 fue electo presidente del comité francés para la evaluación de las Universidades.

Más allá de las matemáticas, Laurent fue siempre un apasionado de las mariposas y se le cuenta entre los coleccionistas más acuciosos de París, dominó varios idiomas entre los que se halla el castellano e incursionó en varios aspectos de la actividad humana, dejando siempre huella de su paso.

Ingresó en 1936 al movimiento Trostkista, al que perteneció hasta 1947, incorporándose con posterioridad al Partido Socialista, comprometido siempre en la defensa de los derechos humanos, frente a la salvaje voracidad del imperialismo y los regímenes totalitarios. Maestro incansable, para el año 2000 contaba ya por más de 10,000 los estudiantes a los que había enseñado su Teoría de Distribuciones. Las actividades políticas de Laurent le impidieron recibir la medalla Fields personalmente, pues le fue negado su ingreso a los Estados Unidos, por representar un "peligro" para el "mundo libre".

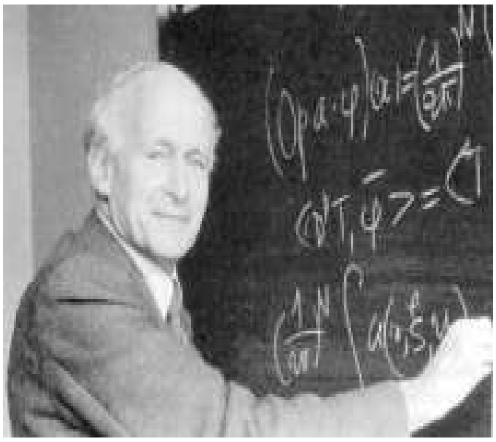

Figura 1: Laurent Schwartz.

El apellido de Laurent delataba su origen judío, situación nada envidiable durante la Segunda Guerra Mundial, período durante el cual, a fin de proseguir con su trabajo matemático, cambió su nombre por el de Laurent-Marie Sélimartin. Se mantuvo siempre orgulloso de su pasado político clandestino, por cuanto hace a la pureza y solidez de sus convicciones, sin embargo admitía en sus últimos años que tal actividad había sido poco productiva.

Su participación en asuntos de interés público no puede calificarse de actividad marginal, pues fue candidato del Trostkismo en Grenoble, durante las elecciones celebradas en 1945 y 1946. Relataba con burla, cuando en su juventud se asoció en un arrebato de irrealidad con otros jóvenes franceses involucrados en la conformación del “Partido de la Revolución Mundial”, siendo posteriormente miembro fundador del Partido Obrero de Unificación Marxista.

En una autobiografía publicada en 1997, misma que se reseña en [5] Schwartz declara:

> *He consagrado una gran parte de mi vida a la política, adoptando la “carrera” de intelectual comprometido. Pero las matemáticas han seguido siendo primordiales. Siempre he querido “cambiar el mundo”, cambiar la vida. He seguido siendo un reformador al que inquieta toda estructura defectuosa y esclerotizada. He roto con el Trostkismo en 1947 tras 11 años. Pero lo esencial de mi formación política deriva de ese período trostkista, con sus luces y sus sombras.*

Laurent Schwatz nunca dejó de ser un combatiente, en 1960, luego de 13 años de haber dejado las filas Trostkistas, presidió el Congreso de Fundación del Partido Socialista. Se solidarizó, pese a su nacionalidad con el pueblo de Argelia en contra del colonialismo francés. De hecho, leyó un emotivo mensaje de aprobación de la tesis doctoral del estudiante Argelino Maurice Audin

> *. . . en ausencia, por haber sido antes asesinado durante una sesión de tortura. . .*

Como consecuencia, Scwartz fue “castigado” con el secuestro de su hijo Marc-André y con una campaña de descrédito en su contra que influyó en la muerte trágica de éste.

Fue activista en contra de la Guerra de Vietnam, y formó parte del Tribunal Russell, que juzgó los crímenes de guerra cometidos en contra de ese país, con el que desde entonces mantuvo un fructífero intercambio científico, político y personal, sin dejar nunca de criticar al gobierno vietnamita por lo que siempre consideró errores imperdonables en contra del pueblo. Denunciante incansable de las injusticias cometidas en Camboya y Laos, miembro del comité por la liberación de Bangladesh, promotor de la defensa de Afganistán en oposición a las invasiones, primero rusa y luego norteamericana.

La vida política de Schwartz se cierra con la fundación primero y la dirección después del Comité de Matemáticos, organización defensora de los matemáticos perseguidos por razonas políticas en cualquier lugar del mundo, obteniendo resultados positivos en muchas de sus gestiones, particularmente en América Latina.

Laurent Schwartz solía decir que no puede hacerse nada que valga la pena, ni en las matemáticas, ni en la política, ni en la vida personal, si no se es suficientemente subversivo.

2. Preliminares.

Tradicionalmente nos referimos a la función Delta de Dirac, por abuso de lenguaje, como aquella transformación $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por la expresión siguiente:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0. \end{cases}$$

Por exigencias teóricas de la Física es necesario que se satisfaga

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt = f(0)$$

para toda función continua $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En particular, si x es la función constante 1 debe darse la igualdad siguiente.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Queda claro que no existe una función que satisfaga las condiciones anteriores, por ello, y en apego a la formalidad mínima se optó, durante la primera mitad del siglo XX, por considerar a la delta de Dirac, no como una función, sino como el “límite” de una sucesión de funciones legítimas, integrables y con integral 1. Por supuesto, la delta de Dirac con la definición inicial no es en modo alguno integrable (Stromberg [16], pp 264-270), pero la situación parece tornarse menos violenta si le asignamos la misma integral que la de cada una de las funciones pertenecientes a la sucesión de la cual la Delta es "límite". Se hace aquí uso, o mejor dicho abuso, del Teorema de Convergencia Monótona consignado en Royden [13], pp 84-93, donde pueden consultarse también los distintos conceptos de convergencia de una sucesión de funciones, siendo Rudin [14] otra buena fuente.

Si consideramos la sucesión de funciones $\delta_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0, & t \notin \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right] \\ n, & t \in \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right], \end{cases}$$

cada una de las cuales es Riemann-integrable y tiene integral 1, parece entonces neciamente superfluo oponer alguna resistencia a considerar a la Delta de Dirac como el límite de esta sucesión de funciones y asignarle a su integral el valor 1. La figura 2 muestra las gráficas de los tres primeros términos de la sucesión.

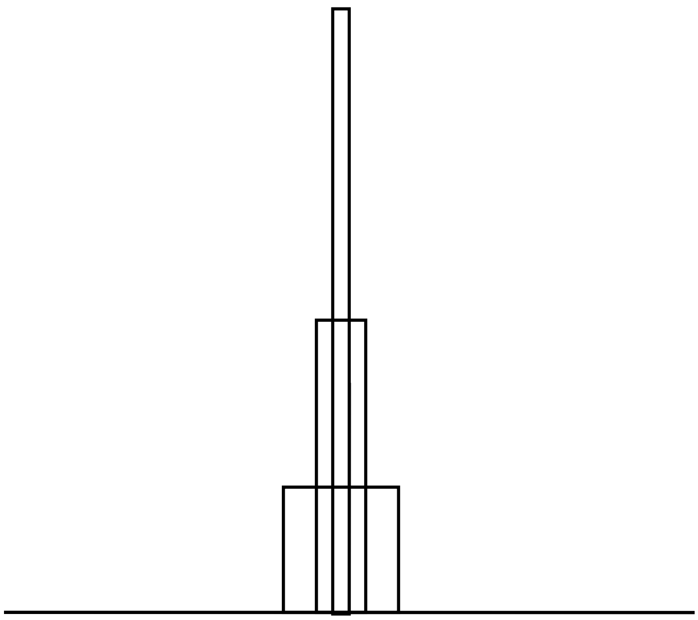

Figura 2: Una sucesión creciente de funciones integrables con integral 1.

Las funciones de la sucesión anterior no son continuas, pero es posible encontrar una sucesión de funciones continuas, como por ejemplo las dadas por

$$\delta_n(t) = \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)},$$

las cuales tienen también integral 1 y parece además no haber inconveniente en considerar que convergen a la Delta de Dirac. La figura 3 muestra los cinco primeros términos de la sucesión.

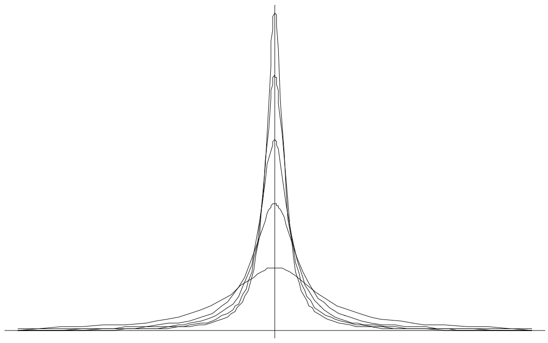

Figura 3: Una sucesión creciente de funciones continuas con integral 1.

Es posible incluso encontrar sucesiones de funciones analíticas con integral 1 y con la propiedad de tener a la Delta de Dirac como "límite", tal es el caso de

$$\delta_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2},$$

sucesión de la cual mostramos los tres primeros términos en la figura 4.

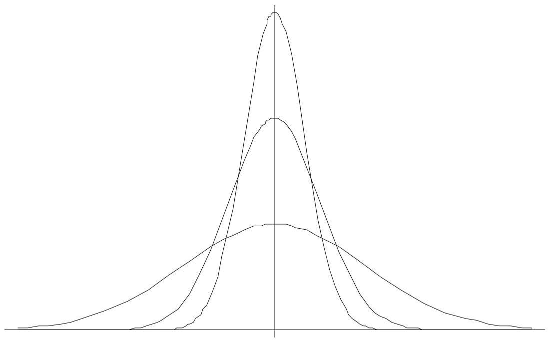

Figura 4: Una sucesión de exponenciales con integral 1.

Y finalmente, la sucesión dada por

$$\delta_n(t) = \frac{\operatorname{sen} nt}{\pi t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} e^{its} ds$$

puede jugar también el papel requerido. En el último caso, la función no está definida para $t = 0$, pero el hecho de que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

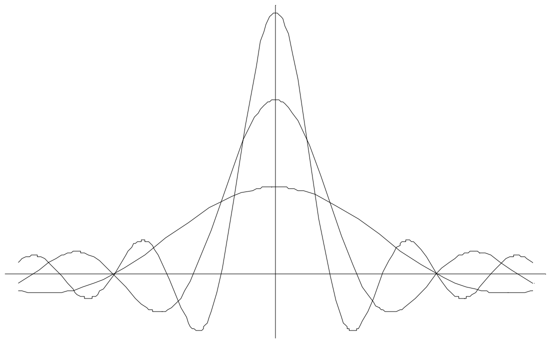

Figura 5: Una sucesión de funciones analíticas con integral 1 que "converge" a la Delta de Dirac.

salva la situación. La figura siguiente muestra los tres primeros términos de esta sucesión.

Si admitimos que las sucesiones anteriores "convergen" a la Delta de Dirac, y cada una de ellas consta de funciones integrables y con integral 1, observamos que con la misma laxitud, mediante un ligero cambio en los parámetros de la definición de cada una de las sucesiones anteriores, podemos definir sucesiones de funciones con integral a para cualquier $a \in \mathbb{R}$, de manera que la integral de la Delta de Dirac puede ser, a elección, nuestro número real predilecto.

3. Funciones de Prueba.

Con la formulación de la Teoría de Distribuciones, Laurent Schwartz obtuvo la medalla Fields, el galardón más prestigiado al interior de la comunidad matemática. Esta codiciada presea se otorga sólo a matemáticos "jóvenes", lo cual, sin haber sido precisado nunca parece significar "menores de 40 años". Mediante la formulación a la que nos referimos, Schwartz aporta la couta de rigor que requería la existencia matemáticamente respetable de la Delta de Dirac. El primer paso de dicha formulación consiste en la definición de las llamadas funciones de prueba.

El *soporte* de una función $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se define como la cerradura topológica $\overline{A}$ del conjunto $A = \{t \in \mathbb{R} | x(t) \neq 0\}$. Dado que el soporte ya se define como cerrado, bastará que sea acotado para ser compacto. Una función con soporte compacto es entonces, aquella cuyo soporte se encuentra contenido en un intervalo cerrado. Una *función de prueba* es una función que es infinitamente diferenciable y tiene soporte compacto.

El conjunto de las funciones de prueba se denota por $\mathcal{T}$, y es no vacío puesto que la función constante cero es una función de prueba, ya que su soporte es $\varnothing$, el cual es obviamente compacto. Un ejemplo de función de prueba un poco más interesante es el que tenemos el la función $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$x(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right), & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

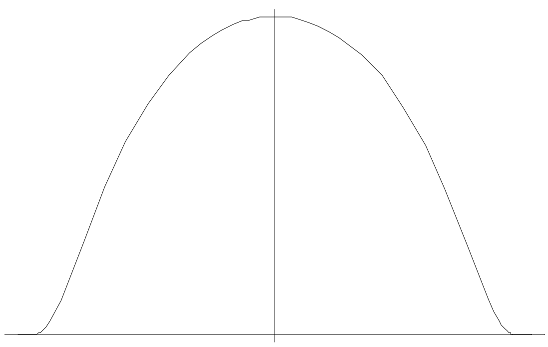

Figura 6: Un ejemplo de función de prueba.

que es analítica y por tanto infinitamente diferenciable. Su soporte está contenido en $[-1, 1]$ por lo que satisface la definición de función de prueba.

Definiendo la suma de funciones de prueba punto a punto, es decir, mediante $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$, y el producto de un número complejo a por una función de prueba de la forma usual $(ax)(t) = ax(t)$, tenemos que la familia $\mathcal{T}$ tiene estructura de espacio vectorial complejo. Para definir una topología sobre el espacio vectorial de las funciones de prueba es suficiente con definir la noción de convergencia de una sucesión de funciones. Decimos que la sucesión (x_n) *converge* a cero en $\mathcal{T}$, si existe un intervalo $[a, b]$ en el que $x_n^{(k)} \to 0$ uniformemente ([16], pp 140,164) en el sentido usual para todo entero no negativo k. Consideremos una función cualquiera $x \in \mathcal{T}$ y definamos la sucesión con términos

$$x_n(t) = \frac{x(t)}{n}.$$

Dado que

$$x_n^{(k)}(t) = \frac{x^{(k)}(t)}{n^{k+1}},$$

entonces cada una de las derivadas converge uniformemente a la función constante cero y la sucesión definida converge a cero en el espacio de las funciones de prueba. Notemos que si $[a, b]$ contiene el soporte de x, entonces contiene el soporte de cada una de sus derivadas, y por tanto el soporte de cada uno de los términos de la sucesión. Finalmente, decimos que (x_n) converge x a en $\mathcal{T}$, si se tiene que $(x_n - x)$ converge a cero en $\mathcal{T}$.

4. Distribuciones.

Una *distribución* es una transformación lineal

$$F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{C}$$

y se dice que es una *distribución continua* si $F(x_n) \to 0$ en $\mathbb{C}$ siempre que $x_n \to 0$ en $\mathcal{T}$. La familia de todas las distribuciones será denotada por $\mathcal{D}$ y es claro que constituye un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Dada una función integrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos definir la distribución F dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, x(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, x(t)\, dt$$

donde $[a, b]$ contiene al soporte de $x \in \mathcal{T}$. Claramente, por la linealidad de la integral hemos definido una distribución, y además, de la aplicación directa de la definición ésta es claramente continua. Se dice entonces que la función *genera* la distribución. Una distribución que es generada por una función integrable se dice que es una *distribución regular*, y en caso contrario se dice que es una *distribución singular*. Tenemos entonces que toda distribución regular es continua.

Observemos por otra parte que la derivada de una función de prueba es también una función de prueba, de manera que si f es una función integrable y F es la distribución regular generada por f, entonces

$$F(x') = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, x'(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, x'(t)\, dt.$$

Además, f' es también integrable y genera una distribución, digamos G dada por

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, x(t)\, dt = \int_a^b f'(t)\, x(t)\, dt$$

suponiendo que el intervalo $[a, b]$ contiene los soportes tanto de x como de x'.

Aplicando ahora el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Leibnitz en la forma de Regla de Integración por Partes, tenemos

$$f(b)\,x(b) - f(a)\,x(a) = \int_a^b f'(t)\,x(t)\,dt + \int_a^b f(t)\,x'(t)\,dt = 0$$

o más sucintamente

$$G(x) + F(x') = 0.$$

Observamos entonces que tiene sentido definir la derivada de una distribución F como

$$F'(x) = G(x) = -F(x') = F(-x').$$

5. El caso de la Delta de Dirac.

Si existiese una función $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable tal que para toda función de prueba se satisfaga

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,x(t)\,dt = x(0),$$

entonces, en el caso particular de la función de prueba definida por

$$x(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-a^2}{a^2-t^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

notamos que $0 \leq x(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y que además por hipótesis tenemos que

$$x(0) = e^{-1} = \left| \int_{-a}^{a} \delta(t)\,x(t)\,dt \right| \leq \int_{-a}^{a} |\delta(t)|dt$$

para cualquier $a > 0$, pero es un resultado conocido de Análisis que

$$\lim_{a \to 0} \int_{-a}^{a} |\delta(t)|dt = 0,$$

lo que es claramente incompatible con la desigualdad anterior.

Como se afirmó antes, una función con las propiedades atribuidas a la "función" delta de Dirac no existe, pero de existir podríamos definir la distribución "regular" generada por tal δ:

$$\Delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,x(t)\,dt = x(0).$$

Por la discusión anterior, tal distribución regular no existe, pero aún podemos definir la distribución singular dada por

$$\Delta(x) = x(0),$$

a la que llamaremos con toda propiedad la *Distribución Delta de Dirac*. La distribución derivada de la distribución Delta está dada por

$$\Delta'(x) = \Delta(-x') = -x'(0).$$

Por un razonamiento completamente análogo al anterior queda establecido que Δ' es también una distribución singular. Por otra parte, si es el caso que Σ es una distribución cuya derivada es precisamente la distribución Δ, entonces también debe ser una distribución singular. La *función escalón de Heaviside* se define por

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

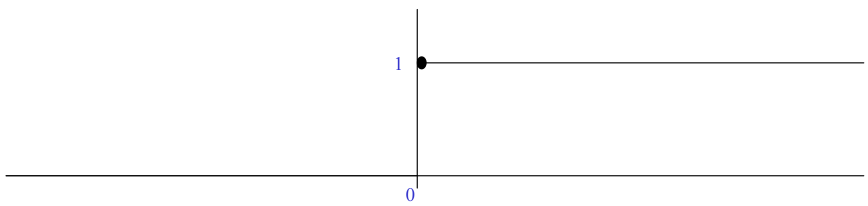

Figura 7: La función escalón de Heaviside.

que por supuesto no es integrable sobre toda la recta, pero claramente, dado que cualquier función de prueba x tiene soporte compacto, el producto σx si es integrable y de hecho podemos definir la distribución Σ mediante su distribución derivada, es decir

$$\Sigma'(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\, x'(t)\, dt = -\int_{0}^{\infty} x'(t)\, dt = \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} x'(t)\, dt.$$

Ahora bien, usando el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos

$$\Sigma'(x) = -\lim_{s\to\infty} x(s) + x(0) = x(0) = \Delta(x).$$

Podemos definir entonces la *distribución escalón de Heaviside* mediante

$$\Sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\, x(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} x(t)\, dt,$$

con lo que la delta de Dirac y sus distribuciones asociadas adquieren la legitimidad requerida, satisfaciendo además el análogo en distribuciones de

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t).$$

6. Transformadas integrales.

Dada una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que para toda $s \in \mathbb{R}$ existe

$$\lambda(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt,$$

definimos su *transformada de Laplace* ([2], pp 401-451) como la función $\mathcal{L}\{x\} = \lambda$. Análogamente, dada una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que para toda $s \in \mathbb{R}$ existe

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist} dt,$$

definimos su *transformada de Fourier* ([2], pp 343-397) como la función $\mathcal{F}\{x\} = \varphi$.

De las propiedades que le solicitamos la Delta de Dirac se desprende, dado que la exponencial es no sólo continua sino el prototipo de función analítica tenemos la transformada de Fourier.

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{ist} dt = e^0 = 1.$$

Y puesto que la Delta de Dirac toma el valor cero en cualquier argumento negativo es claro que también la transformada de Laplace adquiere la forma

$$\lambda(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st} dt = e^0 = 1.$$

De esta forma, tanto la transformada de Fourier de la Delta de Dirac es la función constante 1, al igual que su transformada de Laplace. Ahora bien, sabemos que los cálculos anteriores son inconsistentes, dado que la “función” Delta de Dirac no existe con las propiedades deseables. No obstante si observamos que no es cierto en general que las transformadas de una función de prueba es una función de prueba, requeriremos de construir el espacio vectorial $\mathcal{T}'$ consistente en todas las funciones

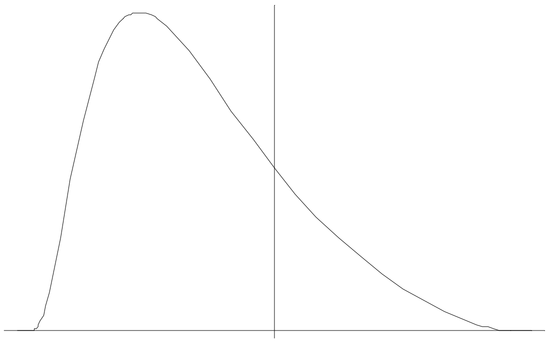

Figura 8: Gráfica del producto cuya integral es el valor de la transformada de Laplace de la función de la figura 7 evaluada en 1.

suaves $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrables sobre cualquier intervalo compacto, llamaremos a las transformaciones lineales $T : \mathcal{T}' \to \mathbb{C}$ *ultradistribuciones* ([17], pp 193-199), y denotamos a la familia de tales transformaciones como $\mathcal{D}'$. Claramente observamos que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$.

Tenemos entonces que, en general, las transformadas integrales de un distribución son ultradistribuciones y que, para $x \in \mathcal{T}$ y $T \in \mathcal{D}'$ podemos definir:

$$\mathcal{L}\{T\}(x) = T(\mathcal{L}\{x\}) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}\{T\}(x) = T(\mathcal{F}\{x\}).$$

Con las definiciones anteriores tenemos que

$$\mathcal{L}\{x\}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = \mathcal{F}\{x\}(0)$$

que es la distribución regular generada por la función constante 1 aplicada a $x \in \mathcal{T}$, y puesto que

$$\Delta(\mathcal{L}\{x\}) = \mathcal{L}\{x\}(0) = \mathcal{F}\{x\}(0) = \Delta(\mathcal{F}\{x\}),$$

y denotando por $\Delta \in \mathcal{D}$ la distribución generada por la función constante 1, podemos escribir

$$\mathcal{L}\{\Delta\} = \Lambda = \mathcal{F}\{\Delta\},$$

lo que muestra una bella y armoniosa coincidencia.

Referencias

[1] Arfken, G., Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, New York 1970.

[2] Barret, L. C. and Wylie, C. R., Advanced Engineering Mathematics, McGraw Hill, New York, 1961.

[3] Byron, F. W., and Fuller, R. W., Mathematics of Classical and Quantum Physics, Dover Publications, New York, 1992.

[4] Canavati, J. A., Introducción al Análisis Funcional, Fondo de Cultura Económica, México, 1998.

[5] Chandrasekharan, C., *The Autobiography of Laurent Schwartz*, Notices of the American Mathematical Society, October 1998 (1141-1147).

[6] De la Peña, L., Introducción a la Mecánica Cuántica, Fondo de Cultura Económica, México, 1991.

[7] Evans, R. D., The Atomic Nucleus, McGraw Hill, New York, 1955.

[8] Foderaro, A., The Elements Nuetron Interaction Theory, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1971.

[9] Gelfand, I. M. and Shilov, G. E., Generalized Functions, Academic Press, New York 1964.

[10] Jones, D. S., Generalized Functions, McGraw Hill, California, 1966.

[11] Mackey, G. W., Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1963.

[12] Maddox, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambdrigde university Press, Cambridge, 1978.

[13] Royden, H. L., Real Analysis, 2nd edition, McGraw Hill, New York, 1968.

[14] Rudin, W., Real and Complex Analysis, McGraw Hill, New York, 1986.

[15] Schwartz, L., Théorie des Distributions, Hermann, Paris 1951.

[16] Stromberg, K. L., An Introducction to Classical Real Analysis, Wadsworth International Group, California, 1981.

[17] Zemanian, A. L., Distribution Theory and Transform Analysis, Mc. Graw Hill, New York, 1968.