Miscelánea Matemática **65** (2018) 55-68 SMM

Blaise Pascal y Pierre de Fermat ¿Los fundadores de la probabilidad?

Raúl Rueda
IIMAS, UNAM
pinky@sigma.iimas.unam.mx

1. Introducción

Que los primeros cálculos de probabilidades surgieron como consecuencia de los juegos de azar, es una idea generalizada[1]. La obra monumental de Todhunter (1865) parece haber iniciado la tradición de reconocer que la correspondencia entre Blaise Pascal (1623 – 1662) y Pierre de Fermat (1601 – 1665) marca el inicio de la teoría moderna de la probabilidad. En esta correspondencia resolvieron dos problemas propuestos por Antoine de Gombard, *Chevalier* de Méré (1607 – 1684) a Pascal. Antes de Todhunter, Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) escribe en la introducción de su *Théorie Analytique* (Laplace, 1812. p. 3):

> La probabilidad debe su nacimiento a dos grandes matemáticos franceses del siglo XVII, tan fértil en grandes hombres y grandes descubrimientos. Pascal y Fermat proponen y resuelven algunos problemas de cálculo de probabilidades.

También Siméon D. Poisson (1781 – 1840) inicia su libro diciendo que (Poisson, 1837. p. 1):

> Un problema relativo a un juego de azar presentado a un austero jansenista [refiriéndose a Pascal] por un hombre de mundo [Méré] es el origen del cálculo de probabilidades.

La humanidad ha dedicado enormes esfuerzos a los juegos de azar. Cuándo se comenzó a jugar es algo que seguramente nunca sabremos, pero existen antecedentes de juegos de azar que se practicaban hace más de 5000 años. Casi el mismo tiempo que los esfuerzos por prohibirlos, esfuerzos inútiles hasta nuestros días, en los que la industria del juego deja miles de millones de pesos de ganancias y muchas personas en

[1]Una excepción relevante es Maistrov (1974).

la ruina. La realidad es que la humanidad sigue jugando juegos muy similares a los que entonces se practicaban.[2]

Hay evidencia clara de que en la civilización egipcia se usaban astrágalos [3]. La forma del astrágalo permitió numerar cuatro de sus lados: el número cuatro se asignó al lado superior que es un poco convexo, mientras que al lado inferior, que presenta un ligero hundimiento, se le asignaba el tres. A los lados laterales se les asignaba el uno a la cara plana y el seis a la otra cara, que era ligeramente hundida. El juego más común utilizaba cuatro astrágalos y la mejor jugada era cuando cada astrágalo mostraba un número diferente. Aunque también se usaban con fines religiosos, hay evidencia de que la gente común los jugaba. David (1955, 1962) es una lectura muy entretenida sobre los orígenes de los juegos de dados y astrágalos. Véase también Hoffman–Jørgensen (1994, pp. xvi – xxvii).

Aunque muchos historiadores de la probabilidad están de acuerdo en la paternidad de Pascal y Fermat, existen algunos que no comparten esta idea. Los argumentos principales de estos últimos autores se basan en las ideas previas a 1654. El objetivo de esta nota es poner en perspectiva ambas posiciones y que el lector decida, aunque al final intentaremos dar una posición conciliadora. Lo que es cierto, es que la frase «la correspondencia entre Pascal y Fermat, en la que resuelven dos problemas propuestos por un entusiasta jugador a Pascal, son los fundamentos de la teoría de la probabilidad», es una forma simplista y con algunas imprecisiones del papel de estos tres personajes.

En la siguiente sección, hablaremos de algunos trabajos previos a 1654, que a pesar de su rudimento, deben tomarse como las primeras soluciones a ciertos problemas surgidos de los juegos de dados. En la tercera, hablaremos de nuestros tres personajes y el papel que, creemos, juegan en esta historia. En la última sección haremos algunos comentarios generales.

2. Los inicios del cálculo de probabilidades

2.1 *De Vetula* y el problema de puntos

Después de siglos de jugar a los dados, alguna idea de simetría o sobre las frecuencias de aparición de cada uno de los lados, deberían haber existido, pero no se tiene evidencia escrita de esto. Kendall (1956)

[2]Como dato curioso, Haigh (2003) describe una gran cantidad de juegos de azar, que van desde los usuales de un casino (dados, cartas, ruleta) hasta juegos de mesa como el monopolio, backgammon y programas de televisión; pasando por los diferentes tipos de apuestas en juegos de conjunto, como el futbol.

[3]Un hueso del tarso unido a la tibia y al peroné y que tiene forma más regular en animales con pezuña, como la oveja o el caballo, que en animales con dedos, como los humanos o perros o gatos.

menciona que el trabajo más antiguo del que él tenga registro sobre el número de formas que resultan de lanzar un dado, es el de un juego inventado por el arzobispo Wibold en el año de 960 y cuya referencia aparece en un manuscrito escrito por Badericus en el siglo XI y publicado en 1615. Independientemente del objetivo del juego[4], el número de resultados al lanzar tres dados es correctamente especificado y las formas perfectamente mostradas. En un poema escrito alrededor del siglo XIII y atribuido al filósofo francés Richard de Fournival (1201 – 1269) (ver Robathan, 1957), se enumeran los posibles resultados al lanzar tres dados, permutaciones incluidas, y se da cuenta de que algunas de ellas son más frecuentes que otras. Bellhouse (2000) describe con detalle el poema, quien traduce *De Vetula* como «Sobre la anciana». Está escrito en forma de autobiografía del poeta romano Publio Ovidio (43 a.C. – 17 d.C.), en tres partes. La siguiente sinopsis ha sido tomada de Bellhouse (2000), quien la atribuye a Richmond (1970).

> La primera parte del poema describe la juventud de Ovidio y sus andanzas amorosas, pero también de otras actividades como la caza y la pesca. Posteriormente, Ovidio da sus razones de por qué deben evitarse los juegos de dados, pero recomienda jugar ajedrez y un juego muy complicado llamado «rhythminachia» que depende de cocientes y números «figurados». En la segunda parte (o segundo libro) relata, con cierto detalle erótico, un amorío trágico-cómico, que surge por la mala identificación de su amada, debido a la oscuridad. Finalmente, termina desilusionado tanto de los placeres del amor como del atractivo de su amada. Este pasaje da el nombre al poema. El tercero y último libro está dedicado a una descripción de los estudios filosóficos a los que Ovidio se dedicó en su edad madura.

La parte que nos interesa es la relativa al lanzamiento de tres dados.[5] En esta parte se describe el lanzamiento de tres dados:

> Cada dado tiene seis números, por lo que en tres hay 18, de los que sólo tres pueden estar en la parte superior de ellos. Al sumar estos números, 16 posibles resultados pueden darse, pero no todos son del mismo valor, ya que el mayor y el más chico aparecen pocas veces, mientras que los de la parte central son más frecuentes. Del resto, mientras más cerca estén de los centrales, más frecuentemente aparecen.

[4]Varios autores mencionan que es decepcionante y un poco desesperante que muchas descripciones de los juegos supongan que el lector ya conoce las reglas, pues en pocas ocasiones se especifican.

[5]En Bellhouse (2000) hay una traducción al inglés por Nancy Prior.

Describe correctamente los 56 resultados (sin permutaciones) así como las diferentes formas en que pueden darse (las permutaciones) y nuevamente habla de combinaciones más frecuentes que otras.

La versión original de *De Vetula* es manuscrita y fue copiada varias veces, incluso, copiada de copias, por lo que es inevitable que se hayan introducido errores. Bellhouse (2000) menciona que él conoce cerca de 60 copias existentes en bibliotecas a lo largo de Europa y dado que producir una copia manuscrita era caro, la cantidad de copias existentes es un indicativo de la popularidad del poema y de su distribución. Hay una adaptación al francés del poema, pero que deja afuera todas las cuentas y lo único que dice es que algunos lanzamientos ocurren con mayor frecuencia que otros. Esta transcripción aparece en un listado del siglo XIV para la biblioteca del Louvre. Menciona, de paso, que la copia que revisaron David (1962) y Kendall (1956), y que se encuentra en la Biblioteca Británica, tiene dos errores, resultado de la trasposición de dos dígitos, en la tabla que sigue a la línea 459 del poema.

En 1494, Fra Luca di Borgo o Luca Pacioli (1445 – 1517) publica lo que puede considerarse el primer registro escrito de un problema de probabilidad y que jugará un papel importante en nuestra historia. En las páginas 197 – 198 del *Summa*[6], el problema aparece enunciado y puede resumirse como:

> A y B juegan palla [presumiblemente un juego medieval de pelota, pero no es claro qué tipo de juego es, ni las reglas específicas del mismo] cuyo objetivo es ganar seis rondas para llevarse la apuesta de 10 ducados. Sin embargo, el juego debe detenerse cuando A ha ganado cinco rondas y B ha ganado tres ¿Cómo debe repartirse la apuesta?

Este es el famoso «problema de los puntos». El libro de Pacioli fue una recopilación de varios problemas que ya habían sido escritos anteriormente. Ore (1960) menciona que encontró este problema en un manuscrito italiano escrito cerca de 1380. Varios autores están de acuerdo que su origen data de años atrás y muy posiblemente sea árabe.

Pacioli resuelve el problema erróneamente. Su solución se basa en el número de juegos que cada jugador ha ganado, en lugar del número de juegos que cada jugador necesita para ganar, que es la forma correcta de resolverlo. Este tipo de problemas se consideraban parte del álgebra, por lo que no era extraño que famosos matemáticos hayan intentado resolverlo. Niccolò Fontana *Tartaglia* (1500 – 1557) en su *Trattato di numeri et misure* de 1556, menciona que la solución de Pacioli está equivocada. Da su propia solución, errónea también, y parece que se da cuenta, pues concluye «la solución a esta pregunta es más judicial que

[6]Consúltese en la página `http://fondosdigitales.us.es/`, las imágenes 413 y 414.

matemática, de manera que no importa cómo se haga la división, ésta será causa de litigio». ¡Elegante salida! Dos años después de la aparición del *Tratatto* de Tartaglia, Giovanni F. Peverone (1509 – 1559?) da otra solución[7], errónea también. David (1962) comenta que Peverone da un argumento general correcto para resolver el problema, pero al final, no respeta sus reglas y da un resultado equivocado. Kendall (1956) dice que si Peverone hubiera respetado sus argumentos iniciales, habría dado la respuesta correcta (ver David, 1962).

2.2 Cardano y Galileo

Gerolamo Cardano nació en Pavia (1501) y murió en Roma (1576). Sus biógrafos lo describen desde un charlatán hasta un sabio incomprendido. Lo que es muy cierto es que Cardano era un jugador empedernido y un escritor prolífico: durante su vida escribió 131 libros y después de su muerte fueron encontrados 111 manuscritos más. Cardano escribió sobre diferentes disciplinas: medicina, leyes, matemáticas, filosofía y pedagogía entre otras. Incluso, escribió su autobiografía, *De Vita Propia*, que es «extraña, extremadamente franca y contradictoria» (ver Hoffman-Jørgensen, 1994). Entre los libros encontrados después de su muerte, está *Liber de Ludo Aleae* (El libro sobre los dados), publicado en 1663, aunque existe evidencia de que fue escrito alrededor de 1526, más de 120 años antes de la correspondencia entre Pascal y Fermat. La vida de Cardano fue un poco turbulenta. Estudió medicina y fue famoso en distintas cortes gracias a sus habilidades, aunque tuvo muchos problemas al inicio para poder ejercer «debido a que fue hijo ilegítimo» (Ore, 1953). Enviudó después de doce años de casado y tuvo que hacerse cargo de sus tres hijos. Los dos varones le dieron sus más grandes desencantos. El mayor envenenó a su esposa y fue condenado a muerte. El menor se dedicaba a pequeñas felonías que con el tiempo fueron volviéndose más grandes, hasta que fue capturado, robándole al propio padre, y encarcelado por varios años; a pesar de esto, Cardano escribió un libro sobre ¡la educación de los hijos! En 1570, Cardano fue encarcelado por la Iglesia acusado de herejía, estuvo preso algunos meses y al final, le fue permitido vivir en su casa bajo vigilancia. En palabras de Williams (2005), «Cardano es uno de los personajes más fascinantes y posiblemente menos estudiado, de antes de 1654». Por ejemplo, Todhunter (1895) sólo le dedica dos hojas en su monumental obra. Sin embargo, Cardano fue muy popular en Europa por sus escritos sobre filosofía y sus libros científicos; durante la segunda mitad del siglo XVI, fue uno de los autores más demandados; era un *best seller*. Algunos de

[7]En *Due brevi e facili trattati, il primo d'arithmetica, l'Altro di Geometria*, 1558. Lione: G. di Tornes.

sus tratados en matemáticas fueron usados durante años en diferentes universidades europeas.

Pero la principal ocupación de Cardano era el juego, que junto con la confección de horóscopos, eran su principal fuente de ingresos. Jugó mucho y durante muchos años. Jugó ajedrez, que en esa época no se consideraba un juego intelectual y sobre el que se apostaba de diferentes maneras; también diversos juegos de cartas y de dados. Muchos nombres de los juegos de esa época todavía se conservan, pero las reglas de la mayoría son desconocidas. El mismo Cardano escribe en su autobiografía:

> Fue en el verano de 1542 cuando adquirí el hábito de acudir diariamente a la casa de Antonio Vimercati, un noble de nuestro pueblo, con el propósito de jugar ajedrez. Hacíamos apuestas de uno o dos reales por juego, y como ganaba con mucha frecuencia, casi diario salía con una pieza de oro, a veces un poco menos, a veces un poco más. Para Antonio, era un placer un poco oneroso, para mí, era el juego y las ganancias. Dediqué a esta actividad dos años y algunos meses, abandonando mi práctica médica y mis estudios. No tenía otros ingresos y mi reputación fue cayendo. Después de ese tiempo, Antonio me obligó a jurar que no regresaría a su casa a jugar. Así lo hice y pronto regresé a mis estudios.

El *Liber de Ludo Aleae* tiene 15 páginas y está dividido en 32 breves capítulos. Es más un manual para jugadores que un libro de matemáticas, por lo que ha sido duramente, y tal vez injustamente, criticado por sus sucesores. En cualquier caso, es considerado el primer libro de probabilidad y en donde se hacen algunos cálculos probabilísticos usando argumentos matemáticos (Ore, 1953).

Los primeros cinco capítulos son algunas menciones de los diferentes tipos de juegos, de quiénes deben jugar y cuándo. En el sexto introduce la idea de que, en el caso de los juegos de dados, éstos deben asegurar las mismas oportunidades a cada cara, es decir, el dado debe ser simétrico (u honesto como dicen ahora).

Define dos conceptos: *circuit*, que es la completa enumeración de todos los casos posibles al lanzar dados (el equivalente al, así llamado, «espacio muestral») y el *equality*, la mitad del circuito: «en el lanzamiento de dos dados, el *circuit* consta de 36 resultados y el *equality* de 18». Con estos conceptos, define en el capítulo 14:

> Hay una regla general, debemos considerar todo el circuito y contar el número de resultados que nos son favorables y compararlos con el resto del circuito. De acuerdo a esa

> proporción deberemos hacer las apuestas de manera que se pueda competir en igualdad de condiciones.

Para algunos autores (por ejemplo Ore, 1953, Gorroochurn, 2002 y Williams, 2005), en este párrafo, Cardano está definiendo la probabilidad como el número de casos favorables entre el número de casos totales, esto es, la definición clásica. Mientras que en el último capítulo, el 32, menciona:

> Si la posibilidad de que aparezca un número es p, entonces después de un número n de repeticiones, el número de veces que este evento ocurrirá no estará lejos de np.

Si bien Cardano estuvo lejos de establecer la ley de los grandes números, «la idea estaba sembrada» (Williams, 2005).

Cardano también resuelve el problema de puntos, pero da una solución equivocada. Sin embargo, anticipa que la solución deberá tomar en cuenta los juegos que le hacen falta a cada jugador para ganar, en lugar de fijarse en cuántos juegos ha ganado cada uno.

Cardano resuelve varios problemas de dados, usando dos enfoques: el primero, la manera directa, usando su definición de «probabilidad» y el segundo, usando el concepto de *equality*. Esta segunda, producía soluciones incorrectas, aunque algunas de ellas fueron corregidas posteriormente. De acuerdo a Ore (1953) y Williams (2005), Cardano usaba un argumento llamado *razonamiento en la media* (ROTM, *reasoning on the mean*), que era una suerte de «proto-esperanza» y que le permitía obtener soluciones aproximadas de manera muy rápida, lo que era muy relevante en la práctica de los juegos. Cardano en varias partes deja claro que «estos razonamientos [teóricos] contribuyen mucho a la comprensión, pero casi nada a la práctica del juego». Su alma de jugador fue más fuerte que su alma matemática. Esta segunda forma de resolver -erróneamente la mayoría de las veces- los problemas, hizo que muchos matemáticos dijeran que era un libro «extraordinariamente difícil de entender» (Bowman, 2010).

Pero Cardano no fue el único que resolvió un problema de juego de dados antes de Pascal y Fermat. Un poco más de 50 años antes de la publicación del *Liber*, el Gran Duque de Toscana, quien era el benefactor de Galileo, le preguntó si en el lanzamiento de tres dados y registrando la suma de los lados que aparecen en la parte superior, obtener 10 u 11 era más fácil que obtener 9 o 12. En un pequeño escrito (Galilei, 1612), Galileo enumeró correctamente todas las posibles combinaciones y contó el total de combinaciones que daban 10 u 11 y las comparó con el total de combinaciones que daban 9 o 12, resolviendo así el problema. Recordemos que estas enumeraciones ya habían aparecido en el poema *De Vetula*, 150 años antes.

Lo que queda claro, es que en esta época, al menos en Italia, la idea de equiprobabilidad y el uso del cociente de casos favorables entre casos totales, eran temas conocidos. En el escrito de Galileo, él pasa directamente a enumerar los casos y determinar cuáles son los favorables para cada combinación, lo que implícitamente supone equiprobabilidad y la razón de casos favorables, como algo conocido.

Comentaremos más sobre esto en la última sección. Ahora es momento de hablar de Pascal y Fermat, y por supuesto, del *Chevalier* de Méré.

3. Pascal, Fermat y el *Chevalier* de Méré

En la gran mayoría del material revisado, el *Chevalier* de Méré es referido como un «asiduo jugador» con mucha experiencia. Algunos dicen que podía dedicar todo el tiempo del mundo a jugar, de manera que era capaz de distinguir si una estrategia era mejor que otra, incluso cuando la diferencia de probabilidades era del orden de 0.09. No sabemos en qué momento adquirió esta fama. Lo que es cierto, es que Antoine Goumbad, si bien no era un noble [8], sí era un consentido de la corte de Luis XIV. Tenía fama de hombre de bien y de hombre honesto y justo. Tuvo una excelente educación y era un hombre de buenas costumbres al que muchas veces se le pedía que intercediera en algunas de las disputas que surgían en la corte. Su encanto, buen gusto, excelente conversación y que le gustaba mantener correspondencia con mucha gente, lo hicieron un invitado muy atractivo en los salones y amigo de muchas figuras importantes de ese periodo. Fue un filósofo que escribió mucho sobre cómo debería comportarse un «hombre de bien».

Pascal y el *Chevalier* se conocieron por un amigo común, el duque de Roannez. El duque y el *Chevalier* se encontraban con cierta frecuencia en la corte y como el *Chevalier* era un matemático aficionado[9] y el duque tenía cierto gusto por la ciencia y, en particular, por las matemáticas, se inició una amistad entre ellos (Chemalliard 1915, 1921). Al mismo tiempo, el duque conocía a Pascal, pues eran casi vecinos. En una ocasión, el duque invitó al *Chevalier* a un viaje de placer a Poitou, en el que coincidió con Pascal. Ore (1960) describe una carta del *Chevalier* en la que cuenta cómo fue este viaje

> En una ocasión hice un viaje con el duque de Roannez, quien tiene una excelente conversación y resulta ser una gran compañía. Viajaba con nosotros M. Mitton, que es alguien bien

[8] El apelativo de *Chevalier* lo tomó de un personaje que usaba en sus escritos. Lo de Méré, era porque ahí creció.

[9] Aunque Pascal opinaba otra cosa, como veremos más adelante.

> recibido por la corte. El duque estaba interesado en las matemáticas y para aliviar el tedio del viaje, invitó a un hombre de mediana edad, que en ese entonces era poco conocido, pero que después hizo a la gente hablar de él, pues se convirtió en un gran matemático. Estas ciencias dan poco placer social, pero este hombre nos sorprendió y varias veces nos hizo reir.

Según Ore (1960), el viaje a Poitou probablemente fue en 1651 o 1652 y Méré escribió esto años después. En esa época, Pascal no cumplía aún los 30 años y ya era un matemático muy reconocido (ver también Chamaillard, 1921). De acuerdo a Ore (1960):

> El distinguido Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, señor de Baussay, se «revolcaría» en su tumba con tal caracterización de su principal actividad en la vida. Antoine Gombaud, Chevalier de Méré fue un escritor francés nacido en 1607 y muerto en 1684. Es conocido por sus ensayos sobre *L'honnête homme* (El hombre honesto), que ahora parecen sin sentido del humor y un poco pedantes, pero cuya lectura aún se disfruta. Fue un personaje prominente en la corte de Luis XIV, en la que era consejero de situaciones delicadas y árbitro en las conflictivas. Le gustaba el juego, sí, pero no era un jugador y mucho menos, un jugador empedernido.

Chamaillard (1921) lo describe como

> ... un hombre culto y de buenas maneras, que gozaba de las simpatías de Luis XIV, y de algunas damiselas, con fama de hombre honesto y justo, al que se le llamaba para dirimir diferencias en la corte. Le gustaba París y la corte, que era el lugar más favorable para todas las diversiones: música, ballet, entretenimientos de «gente bien», de mujeres agradables y, por supuesto, del juego. Esto no impedía que acudiera a los salones literarios.

Jugar era una actividad común en la corte, pero no la única, ni la más relevante. El *Chevalier* criticaba al juego y a los jugadores, en particular a estos últimos. Los llamaba «caprichosos, bizarros y supersticiosos, que por jugar, abandonan cualquier otra actividad». En su opinión, un jugador debería ser agradable y en general no lo eran; pero sobre todo, mencionaba que un «hombre honorable no debería jugar en contra de la gente que estima o quiere» (Chamalliard, 1921). Esta no parece ser la actitud de un jugador empedernido.

Después del viaje a Poitou, Pascal y el *Chevalier* iniciaron una gran amistad. En esa época, Pascal se dedicaba a la *vida ligera* y la ocasión fue propicia para que el *Chevalier* introdujera a Pascal a la *vida mundana*, de la que Pascal tenía poco conocimiento. Es posible que Pascal y el *Chevalier* hayan pasado algún tiempo jugando, pues era una actividad común en esa época, pero difícilmente lo hicieron con pasión (Chamalliard, 1915). Hubo varios encuentros en los que el *Chevalier* y Pascal hablaron de matemáticas e incluso alguna correspondencia en la que Pascal intentó convencer al *Chevalier* de ciertos conceptos. En uno de estos encuentros, el *Chevalier* le hizo dos preguntas a Pascal sobre problemas ya conocidos con bastante antelación:[10]

1. Problema del dado. Cuando uno lanza dos dados, ¿cuántas veces debe hacerlo para que se tenga más oportunidad de obtener al menos un doble seis? El *Chevalier* había encontrado que si se lanzaba un dado cuatro veces, la probabilidad de obtener al menos un seis era un poco mayor de un medio. Pensó entonces en que al lanzar dos dados y obtener al menos dos seises en 24 tiradas era equivalente, pero encontró que no era cierto. Según él, esto era una «contradicción en las matemáticas» y se lo comentó a Pascal.
2. Problema de los puntos. Cómo dividir de manera justa, las apuestas de un juego, en el caso de que, por razones externas, éste deba ser interrumpido antes de que termine.

Parece ser que Pascal no resolvió el primer problema, aunque en la correspondencia con Fermat comenta que «ellos dos, Méré y Roberval podrían resolver este problema». El segundo problema sí fue resuelto en la correspondencia mantenida por Pascal y Fermat. Ore (1960) menciona que Roberval objetó la solución «un poco artificial» de Pascal y como una discusión con Roberval no siempre era agradable, esto motivó que Pascal, a insistencia de Pierre de Carcavi, le escribiera a Fermat. Independientemente de la razón por la que Pascal escribió a Fermat, en esta correspondencia el problema de los puntos se resolvió correctamente, después de más de 160 años.

En total, siete cartas se conservan del intercambio entre Pascal y Fermat en 1654. Cuatro de ellas, Pascal las envió a Fermat,[11] la primera de ellas no se ha encontrado, aunque por la respuesta de Fermat, se

[10] Aparentemente era un matemático amateur, aunque en *Les Œuvres de Monsieur le Chevalier de Méré* (Amsterdan, 1962), no hay evidencia de esto. Se tenía en muy buena opinión de sí mismo, pues en una carta a Pascal en 1656, escribe:

> *Debe darse cuenta que he descubierto en matemáticas cosas que los más instruidos de los tiempos antiguos nunca pensaron y que han sorprendido a los mejores matemáticos de Europa. Usted ha escrito sobre mis invenciones, así como M. Huygens, M. de Fermat y otros* (Chamalliard, 1921).

[11] En David (1962) se encuentra una traducción al inglés de esta correspondencia. En Smith (1929) también se presenta una traducción. Las cartas originales se encuentran en las obras de Pascal (1963) y Fermat (1894).

puede entrever qué le escribió.[12] En esta correspondencia, Pascal y Fermat discuten los dos problemas planteados por el *Chevalier*. Aunque la solución al primero no aparece en toda la correspondencia, Pascal comenta que Méré, y posiblemente Roberval, lo resolvieron, pero el segundo no.[13] La solución de Fermat considera los juegos que faltan por jugar para que cada uno de los jugadores gane. Pascal, como respuesta a la solución de Fermat, desarrolla un método recursivo en el que de manera implícita usa valor esperado, que él llama valor del juego (estas dos soluciones y once más pueden verse en Gorrochurn, 2014).

Es cierto que una simple enumeración, como lo hizo Fermat, bastaba para resolver el problema. Sin embargo, no sólo resolvieron este problema, sino que lo generalizaron a más de dos jugadores. Mientras que Fermat, muy hábilmente, resuelve el problema contando los casos posibles, la solución que propuso Pascal va más allá de enumerar los posibles casos. La solución que le escribe a Fermat, es una solución recursiva para el caso de dos oponentes. Esta solución marca un parteaguas en los cálculos de probabilidades de juegos de azar. La solución general del problema apareció en Pascal (1665), de acuerdo con Edwards (2002).

4. Algunos comentarios

Algunos autores (David, 1955, Kendall, 1956, Ore, 1960 y Burton, 2006) no están de acuerdo en considerar a Pascal y Fermat como los fundadores de la probabilidad. El argumento principal es que hay varios casos de enumeraciones correctas y cálculos, también correctos, a algunos problemas de dados. También mencionan que el primer libro que hace un estudio sistemático de cálculos probabilísticos es el de Cardano, y que él debería ser llamado el «padre de la probabilidad». En dado caso, fue el primero en resolver algunos problemas, aunque su libro tiene varios errores y es bastante confuso para leer. Sin embargo, si de hacer constar que *el primero es el primero* [14], en efecto Cardano es, si no el primero, sí la primera constancia escrita. Para otros autores (Devlin, 2010,[15] Edwards, 2002 y una larga lista), antes de Pascal y Fermat los cálculos se reducían a enumeraciones y algunos conteos. El problema de los puntos es un claro ejemplo de que la probabilidad no estaba bien desarrollada. Antes de ellos, solamente estaban claros los conceptos de equiprobabilidad y alguna idea de la definición clásica de probabilidad.

[12] Renyi (1972), basado en la correspondencia original, reescribe las cuatro cartas de Pascal a Fermat. Un libro muy disfrutable.

[13] Pascal le comenta a Fermat en una carta que «Méré tiene cierta habilidad, pero él no es un geómetra (lo que es, como usted sabe, un gran defecto)».

[14] Si no que le pregunten a Newton, en sus comentarios a Leibniz respecto a la paternidad del cálculo diferencial.

[15] Este es un libro muy entretenido

Las matemáticas de Pascal y Fermat, sobrepasaron esto. Como en cualquier historia, cada historiador tiene su favorito. Otros autores dicen que la revolución se inició con el libro de Huygens (1657), apenas tres años después de la famosa correspondencia.[16] En el siglo XVII, y antes, la *probabilidad* estaba asociada a opiniones, relaciones y creencias (completamente subjetiva), mientras que *chance* (oportunidad, ocasión, posibilidad) tenía un significado más cercano a una probabilidad objetiva. La palabra *probabilidad* o *probabilitas* no aparece en los cálculos relativos a los juegos de azar. Podemos decir que el cálculo usado en estas soluciones está basado en la idea de simetría, que era, y sigue siendo, básica en los juegos de azar. Esta simetría permitió calcular proporciones, contando el número de casos favorables y dividiéndolo entre el número total de casos. Eran más problemas de enumeración y combinatoria que de un cálculo propiamente dicho. La probabilidad no era parte de la teoría matemática, pertenecía al mundo de los «problemas prácticos y argumentos». La *probabilidad* no era un número, sino un concepto: cuando se hablaba de *probabilidad*, se hablaba de «todas las opciones, a favor y en contra».

Nos queda claro que cada quien tiene su propia historia y su interpretación de lo que el autor quiso decir. Es apropiado citar a Brakel (1976) quien menciona dos puntos que, nos parece, justifican todas las interpretaciones sobre quién hizo qué:

> Al leer los escritos de nuestros predecesores
> 1. Las ideas conceptuales del siglo XX (o el XXI) son fácilmente atribuibles a los escritores de todos los tiempos.
> 2. No hacemos distinciones entre los diferentes aspectos del concepto de probabilidad. Pensar que todos los escritores hablaban del mismo único concepto, es un error.

Nuestra opinión es que el verdadero fundador de la teoría moderna de la probabilidad fue Jacob Bernoulli con su obra póstuma *Ars Conjectandi* que apareció en 1763, pero esa es otra historia que será contada en otra ocasión…

Agradecimientos

A R. Villalba por la traducción de grandes pasajes de las obras de Chamalliard. E. Gutiérrez y P. Romero leyeron una primera versión del manuscrito. Sus correcciones y comentarios mejoraron notablemente la presentación. Los comentarios de dos árbitros mejoraron la presentación, por lo que les estoy muy agradecido.

[16] Por cierto, en David (1962) están traducidas al inglés dos cartas escritas en 1660, que también aparacen en Fermat (1894). En la primera, Fermat le pide a Pascal encontrarse a medio camino entre Toulouse y París, a lo que Pascal contesta que su salud se lo impide. Al final, estos dos grandes personajes nunca se conocieron personalmente; Fermat murió en 1665 y Pascal en 1662.

Bibliografía

[1] D. R. Bellhouse, «De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations», *Int. Statist. Rev.*, vol. 68, 2000, 123–136.
[2] J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Basel: Thurneysen Brothers, 1763, Hay una traducción anotada por Sylla, E.D. (2006) *The Art of Conjecturing*. Baltimore, MA: The John Hopkins University Press.
[3] N. Bowman, *Reading in context: the reception of Gerolamo Cardano's Liber de Ludo Aleae*, Department of Mathematics, Western Carolina University, 2010, Manuscrito.
[4] D. M. Burton, *The history of mathematics: an introduction*, New York: MacGraw-Hill, 2006.
[5] Cardano, *Liber de Ludo Aleae*, 1663, Impreso en *Opera Omnia*, Vol. 1. Lyon: Caroli Sponii. Traducido al inglés por S.H. Gould en Ore (1953) y reimpreso como *The book of games of chance*. (1961) New York, NY: Holt, Rinehart & Winston. (Reimpreso por Dover en 2015).
[6] E. Chamaillard, *Pascal. Mondain et amoureux*, Paris: Les Presses Universitaires de France, 1915.
[7] ———, *Le Chevalier de Méré*, Niort: G. Clouzot, 1921.
[8] F. N. David, «Dicing and gaming (A note on the history of probability)», *Biometrika*, vol. 42, 1955, 1– 15.
[9] ———, *Games, gods & gambling*, London: Griffin, 1962.
[10] K. Devlin, *The unfinished game: Pascal, Fermat, and the Seventeenth-Century letter that made the world modern*, New York: Basic Books, 2010.
[11] A. W. F. Edwards, *Pascal's arithmetical triangle*, Baltimore, MA: John Hopkins University Press, 2002.
[12] P. Fermat, *Œuvres. Tome Deuxième*, Paris: Gauthier-Villars et fils, 1894.
[13] G. Galileo, *Sopra le scoperte dei dadi*, En: *Opera*. Firenze: Barbera. 1898, 591 – 594, 1612, Una traducción al inglés se encuentra en el apéndice dos de David, 1962.
[14] P. Gorroochurn, *Classic problems of probability*, Hoboken, NJ: Wiley, 2012.
[15] ———, «Thirteen correct solutions to the "Problem of Points" and their histories», *The Mathematical Intellingencer*, vol. 36, 2014, 56–64.
[16] J. Haigh, *Taking chances. Winning with probability*, Oxford: University Press, 2003.
[17] A. Hald, *History of probability and statistics and their applications before 1750*, Hoboken, NJ: Wiley, 2003.
[18] J. Hoffman-Jøregensen, *Probability with a view toward statistics*, vol. I, New York: Chapman and Hall/CRC, 1994.
[19] C. Huygens, *Ratiociniis in Ludo Aleæ. Leiden, Ned: Batav*, London: Keimer, 1657, (Como apéndice del libro de Frans van Schooten, *Exercitationum mathematicarum libre quinque*. 517 - 534). Traducido al inglés como *The value of all chances in games of fortune*. (1714).
[20] M. G. Kendall, «The beginnings of a probability calculus», *Biometrika*, vol. 43, 1956, 1– 14.
[21] P.-S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Paris: Courcier, 1812.
[22] L. E. Maistrov, *Probability theory. A historical sketch*, New York: Academic Press, 1974.
[23] O. Ore, *Cardano, the gambling scholar*, Princeton: University Press, 1953.
[24] ———, «Pascal and the invention of probability theory», *Amer. Math. Monthly*, vol. 67, 1960, 409– 419.
[25] L. Pacioli, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, Venecia: Paganini, 1494.
[26] B. Pascal, *Traite du triangle arithmetique*, Paris: Chez Guillaume, 1665.
[27] ———, *Œuvres complètes*, Paris: Editions du Seuil, 1963.
[28] S.-D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Paris: Bachelier, 1837.

[29] A. Renyi, *Letters on probability*, Detroit, MI: Wayne State University Press, 1972.
[30] J. A. Richmond, «Difficilis nostra poscitvr arte labor», *Classical Rev.*, vol. 20, 1970, 343 –345.
[31] D. M. Robathan, «Introduction to the pseudo-Ovidian *De Vetula*», *Trans. Amer. Philological Assoc.*, vol. 88, 1957, 197 – 207.
[32] D. E. Smith, *A source book in mathematics*, New York: Mc.Graw-Hill, 1929, Reimpreso por Dover en 1959.
[33] I. Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability. From the time of Pascal to that of Laplace*, Cambridge: MacMillan & Co, 1865.
[34] J. van Brakel, «Some remarks on the prehistory of the concept of statistical probability», *Arch. Hist. Exact Sc.*, vol. 16, 1976, 119 – 136.
[35] L. Williams, «Cardano and the gambler's habitus», *Stud. Hist. Phil. Sci.*, vol. 36, 2005, 23 – 41.