MISCELÁNEA MATEMÁTICA **27** (1998) 29-38 SMM

El *álgebra de parches* y la medida de Jordan

Fausto Ongay
Centro de Investigación en Matemáticas
Apdo. Postal 402
36000 Guanajuato, Gto.
México

Introducción.

Vagamente hablando, la necesidad de introducir la integral de Lebesgue aparece cuando se trata de *completar la teoría de integración de Riemann bajo ciertas operaciones límite*: Por dar un ejemplo, una sucesión monótona y acotada de funciones integrables en el sentido de Riemann, en general no converge a una función integrable en el sentido de Riemann; pero si cambiamos *Riemann* por *Lebesgue*, entonces la afirmación es cierta. Es justamente este tipo de *cerradura* de la teoría de Lebesgue *bajo límites* (cerradura en un sentido que se puede precisar) lo que le da su importancia.

Y sin embargo, sería absurdo desechar por completo la teoría de integración de Riemann pues, como bien sabemos ya desde nuestros primeros cursos de cálculo, para muchos procesos ésta es completamente adecuada. Por lo mismo, resulta interesante entender cuál es su estructura, cuáles son los elementos básicos que intervienen en su definición y que papel desempeñan éstos.

Acordes con esta filosofía, en esta nota analizaremos algunos aspectos de la teoría de la medida asociada a la integral de Riemann, pero lo haremos de una manera más bien informal y algo heterodoxa, que esperamos resulte al lector hasta cierto punto divertida, y que ojalá también le sugiera algunos *experimentos matemáticos* del estilo del que aquí presentamos.

1 La medida de Jordan.

Usualmente, para definir la integral de Lebesgue el primer paso es construir una familia de conjuntos donde ésta *tiene sentido*, que son precisamente los conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue (véase por ejemplo [3] para una discusión formal y bastante accesible). De manera similar, asociada a la integral de Riemann tenemos la familia de los conjuntos medibles en el sentido de Jordan o *Jordan-medibles*. El nombre está dado en honor del matemático francés Camille Jordan, quien introdujo este enfoque para fundamentar la teoría de integración, mismo que influyó de manera decisiva para la construcción que hiciera Lebesgue posteriormente.

Los conjuntos Jordan-medibles son fáciles de describir, y de hecho la teoría se puede desarrollar en $\mathbb{R}^n$ sin demasiado esfuerzo (véase por ejemplo [2], donde, por cierto, a los conjuntos Jordan-medibles se les llama "contented sets"), aunque por simplicidad aquí restringiremos nuestra atención al plano. En tal caso la descripción es como sigue (cf. [1]):

Primeramente, llamemos *mosaico* a un conjunto formado por cuadrados, con lados paralelos y con interiores ajenos dos a dos (figura 1), donde para cada mosaico los cuadrados son congruentes entre sí, pero sus dimensiones varían de un mosaico a otro.

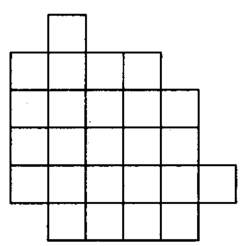

Figura 1: Un mosaico típico

Entonces, dado $F \subset \mathbb{R}^2$, definimos su medida interior, $\underline{m}(F)$, como el supremo de las áreas de los mosaicos contenidos en F (véase la figura 2). Similarmente, se define la medida exterior, $\overline{m}(F)$, como el ínfimo de las medidas de los mosaicos que contienen a F, y por construcción es claro que $0 \leq \underline{m}(F) \leq \overline{m}(F)$, aunque alguna de ellas podría ser ∞.

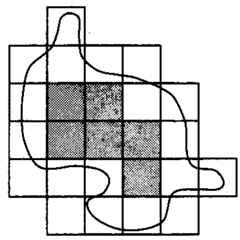

Figura 2: Construcción de las medidas interior y exterior

Finalmente, decimos que F es **Jordan-medible** si

$$\underline{m}(F) = \overline{m}(F) < \infty$$

y definimos la medida de Jordan de F (a la que llamaremos simplemente el **área**), $m(F)$, como este valor común de las medidas interior y exterior. Esta construcción define pues, a la vez, a los conjuntos Jordan-medibles y a su medida.

En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{J}$ a la familia de subconjuntos Jordan-medibles de $\mathbb{R}^2$, y Q denotará al cuadrado unitario: $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Recordemos además que, dados $F \subset \mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}^2$, se define

$$F + a = \{x + a \in \mathbb{R}^2 \mid x \in F\},$$

y decimos que $F + a$ es el trasladado de F por a.

Una consecuencia bastante directa de la definición de conjunto Jordan-medible, es que los polígonos (sería tal vez más correcto decir *figuras con frontera poligonal*, pero será claro del contexto a que nos referimos) son medibles y además *densos* dentro de los conjuntos Jordan-medibles, en el sentido que para todo conjunto medible, F, y para toda $\epsilon > 0$, existen polígonos, G y H, tales que $G \subset F \subset H$ y con

$$|m(G) - m(H)| < \epsilon.$$

Otra consecuencia, quizá algo menos evidente, es que $\mathcal{J}$ es un *álgebra de conjuntos*; es decir, es una familia cerrada bajo uniones e intersecciones finitas; sin embargo, en general no es cerrada bajo uniones o intersecciones contables. De hecho, informalmente hablando, los conjuntos Lebesgue-medibles se obtienen justamente al tratar de extender $\mathcal{J}$ a la mínima clase, $\mathcal{L}$, que posee las dos propiedades de cerradura mencionadas, las que definen lo que se conoce como σ-álgebra, y que resultan fundamentales al considerar procesos límite como los que aludíamos al inicio.

Observación: En las definiciones de álgebra y σ-álgebra también se incluye al vacío y al conjunto total, y se pide que las familias sean cerradas bajo complementación. Como en el caso del área usual, que es el que nos interesa aquí, el complemento de un conjunto con medida finita siempre tiene medida infinita, estos conjuntos no son relevantes para la definición de la medida, por lo que no los consideraremos en nuestro desarrollo pues no son parte esencial de la construcción.

Con esta terminología, podemos expresar de otra forma la definición de área, diciendo que hemos definido una función en la familia $\mathcal{J}$, $m\,\mathcal{J} \to \mathbb{R}$, y no es difícil probar que m satisface las cuatro propiedades básicas siguientes:

(1) $m(F) \geq 0$ para todo $F \in \mathcal{J}$ (positividad).

(2) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{J}$ son dos conjuntos medibles con interiores ajenos, entonces $F = F_1 \cup F_2 \in \mathcal{J}$ y $m(F) = m(F_1) + m(F_2)$ (aditividad).

(3) Si $F \in \mathcal{J}$ entonces $F + a \in \mathcal{J}$ para todo $a \in \mathbb{R}^2$ y $m(F + a) = m(F)$ (invariancia bajo traslaciones).

(4) $m(Q) = 1$ (normalización).

En este punto conviene observar que la medida de Lebesgue satisface una propiedad más fuerte que (2), llamada σ-aditividad, que se obtiene al considerar en vez de pares de conjuntos colecciones numerables de conjuntos ajenos dos a dos. Esta propiedad, que está íntimamente relacionada con el hecho de que $\mathcal{L}$ sí es una σ-álgebra, tiene entre sus consecuencias un resultado absolutamente central de la teoría de la medida; a saber, que la medida de Lebesgue es la única medida positiva, σ-aditiva, normalizada para que la medida del cuadrado unidad sea 1, e invariante bajo traslaciones que admite el plano (dicho de otro modo y para aquellos familiarizados con el tema, la medida de Lebesgue es la medida de Haar normalizada del grupo aditivo $\mathbb{R}^2$).

Ahora bien, para la medida de Jordan se tiene un resultado semejante, ya que las cuatro propiedades anteriores la caracterizan. En otras palabras, cualquier función, definida en la clase de conjuntos Jordan-medibles que satisfaga las cuatro propiedades del área mencionadas arriba, necesariamente coincide con la medida de Jordan.

Sin embargo, aunque generalmente no se hace énfasis en ello, la densidad de los polígonos en $\mathcal{J}$ es un elemento importante para esta caracterización de la medida de Jordan; de hecho, no es necesario que la medida esté definida en todo $\mathcal{J}$: cualquier función definida en una subfamilia de $\mathcal{J}$ en la que los polígonos sean densos y que satisfaga (1)-(4), necesariamente es la restricción de la medida de Jordan. En el fondo esa es la motivación de esta nota: vamos a continuación a construir una *medida*, es decir una función que satisface casi todas las propiedades del área, pero que resultará muy distinta de la medida de Jordan, ya que la definiremos en una clase que no es suficientemente amplia como para contener a todos los polígonos... y el chiste es explorar un rato algunas consecuencias de haber cambiado nuestras hipótesis.

2 El *álgebra de parches* y la función de cobertura

Definición: Un *parche* es una unión finita de trasladados de Q. En otras palabras un parche es un subconjunto, P, de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} Q + a_i \quad ; \qquad \text{para algunas } a_i \in \mathbb{R}^2 .$$

En tal caso diremos que $P = \bigcup_{i=1}^{n} Q + a_i$ es una *representación* del parche, y cada $Q + a_i$ es un *cuadro de la representación.*

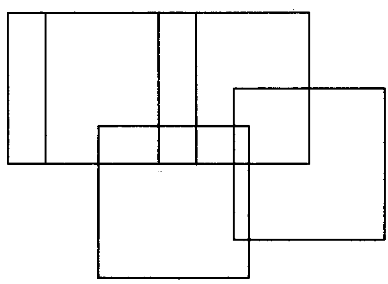

Figura 3: Un parche típico

Nótese que cada parche es una unión finita de parches conexos. Asimismo, la frontera de cada parche conexo es un polígono con lados paralelos a los ejes coordenados, y a los vértices de este polígono les llamaremos vértices del parche.

Denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de parches en el plano; es claro que $\mathcal{P} \subset \mathcal{J}$ y el siguiente lema es inmediato de la definición:

Lema 1 *$\mathcal{P}$ es cerrado bajo la operación de uniones finitas.*

Pero también, evidentemente, no es cerrado bajo intersecciones, ni siquiera finitas, por ello hemos entrecomillado *álgebra* en el título. (De hecho, si *cerráramos* $\mathcal{P}$ bajo intersecciones finitas para obtener un álgebra de conjuntos *bona fide*, lo que obtendríamos sería el conjunto de todos los polígonos con lados paralelos a los ejes coordenados, y esta familia resultaría demasiado amplia para la construcción que vamos a hacer; pero por otro lado hay que observar que la cerradura bajo intersecciones no aparece explícitamente en ninguna de las cuatro propiedades que determinan al área.)

En general, dado un parche, P, éste puede representarse de muchas maneras como unión de trasladados de Q: por ejemplo, en el parche (a) de la figura 4 podemos eliminar el cuadrado interior. Pero siempre existen representaciones mínimas para él, en el sentido de que el parche no se puede representar con menos cuadrados:

Definición: Una representación, $P = \bigcup_{i=1}^{n} Q + a_i$, de un parche es *irreducible* si

$$Q + a_j \not\subset \bigcup_{i \neq j} Q + a_i \quad ; \quad \forall j \, .$$

(Dicho de manera llana, una representación irreducible no contiene cuadros superfluos.)

Una representación es *mínima* si el número de cuadrados en la representación es mínimo.

El punto importante es ahora el siguiente:

Lema 2 *Todo parche tiene al menos una representación irreducible, y toda representación mínima es irreducible.*

Demostración: En efecto, como el número de cuadros en los parches es finito, es claro que en toda representación de un parche podemos ir

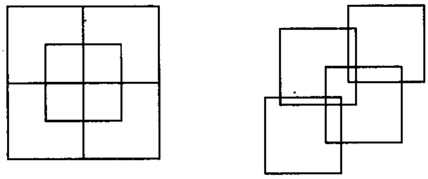

Figura 4: a) Parche reducible b) Parche irreducible

suprimiendo cuadros hasta obtener una representación irreducible, lo que prueba la existencia de representaciones irreducibles.

Por otro lado, es claro que si una representación mínima fuera reducible, suprimiendo un cuadrado superfluo tendríamos una representación con un cuadrado menos. ■

Ahora, como ya dijimos, la gracia del conjunto de parches $\mathcal{P}$ es que en él se puede definir una función que cumple con casi todas las propiedades de la medida de Jordan en el plano, pero que no es la restricción de ésta al conjunto de parches:

Definición: Si $P \in \mathcal{P}$ es un parche, su *cobertura*, $c(P)$, es el número de cuadrados en una representación mínima de P.

La siguiente proposición es nuestra afirmación clave (en el fondo, lo que se afirma es que la cobertura es como una medida de *conteo*; por ello, aunque es irrelevante para nuestro propósito, en aras de la estética tal vez deberíamos también incluir al conjunto vacío como un parche, con cobertura cero):

Proposición 1 *La función cobertura, $c\mathcal{P} \to \mathbb{R}$, satisface las propiedades del área (1), (3), y (4). La cobertura no es aditiva, y en vez de (2) satisface la propiedad de subaditividad siguiente: Si P_1 y P_2 son dos parches con interiores ajenos, entonces*

$$c(P_1 \cup P_2) \leq c(P_1) + c(P_2) \tag{2'}$$

(En particular, c no es la restricción de la medida de Jordan a $\mathcal{P}$).

Demostración: Claramente c satisface (1) y (4) por definición; la invariancia bajo traslaciones también es muy sencilla, pues si $\bigcup_{i=1}^{m} Q + a_i$

es una representación mínima del parche P, entonces $\bigcup_{i=1}^{m} Q + (a_i + a)$ es una representación mínima del parche $P + a$.

Para ver que c satisface la propiedad subaditiva (2') basta con ver que si $P_1 = \bigcup_{i=1}^{m} Q + a_i$ y $P_2 = \bigcup_{j=1}^{n} Q + b_j$ son representaciones mínimas de dos parches que tienen interiores ajenos, entonces $\bigcup_{i=1}^{m} Q + a_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} Q + b_j$ es una representación de $P_1 \cup P_2$, con $m + n = c(P_1) + c(P_2)$ cuadros, de modo que $c(P_1 + P_2) \leq c(P_1) + c(P_2)$.

La afirmación que quizá no sea del todo obvia es que la cobertura *no* es aditiva. Para verlo consideremos los siguientes parches: $P_1 = Q \cup (Q + (1/2, 0))$, $P_2 = (Q - (1,0)) \cup (Q - (3/2, 0))$ (notemos que P_2 es la reflexión de P_1 en el eje de las y). Entonces cada parche P_i tiene cobertura 2, pero $P_1 \cup P_2$ tiene cobertura 3. ■

En realidad, c tiene un comportamiento muy distinto al del área, y que bien podríamos catalogar de *patológico*. Por ejemplo, el área tiene la importante propiedad de monotonía siguiente: si F y G son Jordan-medibles y $F \subset G$, entonces $m(F) \leq m(G)$. Sin embargo, existen parches acotados con *cobertura ilimitada*. Más precisamente:

Proposición 2 *Dado cualquier rectángulo A, de lados mayores que 1, y dado $M > 0$, existe un parche $P \subset A$ tal que*

$$c(P) > M\,.$$

Demostración: En efecto, si consideramos cualquier segmento no paralelo a los ejes coordenados, con extremos $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ de modo que $a_1 < b_1$; $a_2 < b_2$, y escogemos cualquier colección de puntos, c_i ; $i = 1, \ldots, n$; $n > M$, en el segmento, es fácil ver que el parche $\bigcup_{i=1}^{m} Q + c_i$ es un parche irreducible, que está contenido en el rectángulo $[a_1, b_1 + 1] \times [a_2, b_2 + 1]$ pero cuya cobertura es n, y esto basta para probar la afirmación (figura 5). ■

Corolario 1 *La cobertura no es una función monótona.*

Demostración: En efecto, si en la construcción de la proposición anterior tomamos como segmento el que tiene vértices en $(0,0)$ y $(1,1)$, contenido en el parche $P = [0,2] \times [0,2]$ tiene una representación irreducible evidente con 4 trasladados de Q, de modo que tiene cobertura 4; pero cualquier colección de más de 4 puntos en el segmento dará un parche contenido en P con cobertura mayor que 4. ■

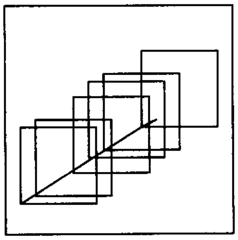

Figura 5: Construcción de un parche irreducible con una cobertura arbitrariamente grande

Como vemos, la función cobertura tiene casi las propiedades del área, pero al mismo tiempo un comportamiento radicalmente distinto, y esto plantea de inmediato varias interrogantes:

Por supuesto la primera es si se puede modificar la definición de la función cobertura, para que sea una función aditiva. Otra pregunta es si se puede extender la cobertura considerando la cerradura de $\mathcal{P}$ bajo intersecciones finitas, de modo que sí tengamos un álgebra de conjuntos, pero tratando de conservar la conclusión de la proposición 1, de modo que no regresemos a la medida de Jordan.

Otro ejemplo, (debido a Fico González Acuña): ¿existe alguna función *monótona* en el álgebra de parches que cumpla con las condiciones que cumple la cobertura?

Y hay otras muchas preguntas que uno podría hacerse. Desconozco la respuesta a las preguntas que he planteado aquí, pero me parece que responderlas sería una bonita manera de poner en relieve la importancia de algunas de las propiedades del área, como la de monotonía, etc.

En fin y a manera de conclusión, que como decía en la introducción uno puede jugar un rato alrededor de este tipo de construcciones y, literalmente, entretenerse con ello (como un ejemplo de lo que digo, al tratar de probar el lema 2, y apenas dibujé la figura 4, la terminología me la sugirió la popular tira cómica *La pequeña Lulú*). Concedo que el problema aquí planteado tal vez no sea muy importante y que los resultados que pudieramos obtener no resulten muy profundos; pero quizá el jugar con las nociones de esta manera podría ayudarnos a entender un poco mejor algunos puntos básicos dentro de las teorías matemáticas. De la teoría de la medida en este caso, pero la filosofía creo que es válida en general.

Agradecimientos. Esta nota surgió después de una discusión sostenida con algunos asistentes al seminario del Profesor Vladimir Boltyanski [1] sobre el tercer problema de Hilbert; a todos ellos mi agradecimiento.

Agradezco asimismo las sugerencias de los árbitros que revisaron el trabajo y espero haber hecho buen uso de ellas.

Tengo también una deuda de gratitud especial con Juanjo Rivaud, quien ya ha fungido varias veces como una *conciencia matemática* para mí.

Referencias

[1] V. Boltyanski, *Hilbert's Third Problem.* Notas de curso, Comunicación Técnica CIMAT, (1996). Véase también su libro *Figuras equivalentes y equidescomponibles.* Limusa-Wiley, (1995).

[2] L. H. Loomis & S. Sternberg, *Advanced Calculus*, Addison Wesley, (1968).

[3] H. L. Royden, *Real Analysis* 2^{nd} edition. Mac Millan(1968)