Miscelánea Matemática **52** (2011) 81–101 SMM

El problema de los momentos

Marcos López García

Instituto de Matemáticas, UNAM

Resumen

En este trabajo presentamos una breve visión panorámica acerca del problema de los momentos, además damos resultados clásicos y modernos de esta teoría.

Introducción

En 1894 Thomas Jan Stieltjes (1856-1894) publicó su trascendental artículo "Recherches sur les fractions continues" [45], en el que realiza un estudio sistemático de la convergencia de las fracciones continuas y establece una relación con el llamado problema de los momentos. En las siguientes páginas presentamos resultados clásicos y modernos sobre el problema de los momentos. Para una discusión más detallada el lector puede consultar los trabajos de Akhiezer [1], Berg [2], Hoff [23] y Shohat & Tamarkin [43].

Stieltjes introdujo la integral (que lleva su nombre) de una función g respecto a una función monótona creciente F, denotada $\int_I g dF$, donde I es un intervalo. Para $n \in \mathbb{N}$ define el n-ésimo momento de F como sigue

$$s_n(F) = \int_I x^n dF(x).$$

En adelante supondremos que $s_n(F) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y diremos que $(s_n(F))_{n\geq 0}$ es la sucesión de momentos de F.

Stieltjes señala: "El problema de momentos relacionado a una sucesión de números reales dada $(s_n)_{n\geq 0}$, se refiere a encontrar una función monótona creciente F, definida en un intervalo I, tal que $s_n(F) = s_n$ para todo $n \geq 0$. Si tal función F existe, entonces decimos que es una solución al problema de momentos."

Lo anterior nos lleva a plantearnos lo siguiente:

1. ¿Existe algún criterio para establecer la existencia de soluciones a un problema de momentos?

2. En caso de que un problema de momentos tenga alguna solución, ¿es ésta única? ¿Existen criterios para establecer la (no) unicidad de soluciones? Se dice que un problema de momentos es determinado si tiene una única solución, en caso de que tenga más de una solución se dice que es indeterminado.

3. ¿Se pueden describir todas las soluciones a un problema de momentos?

A través de este trabajo damos respuestas a estas preguntas y ejemplos.

Debemos mencionar que Stieltjes analizó y resolvió el problema con $I = (0, \infty)$ y se le refiere como el problema de momentos de Stieltjes. En 1921 H. Hamburguer [19] hizo lo propio con $I = \mathbb{R}$ por lo que el correspondiente problema lleva su nombre. Al caso $I = [0, 1]$ se le conoce como el problema de momentos de Hausdorff [20].

Además se pueden considerar medidas positivas μ en vez de funciones F, pero en la primera mitad sólo consideramos el caso cuando F es una función absolutamente continua (respecto a la medida de Lebesgue), i. e. suponemos que existe una funcion integrable f tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

En este caso tenemos $dF(x) = f(x)\, dx$ y escribiremos $s_n(f)$ en vez de $s_n(F)$.

Se han usado distintas técnicas y sub-áreas del análisis para resolver un problema de momentos, de las que podemos mencionar las siguientes:

1. Fracciones continuas y sus teoremas de convergencia. Fue el método desarrollado por Stieltjes [45] y que también usó Hamburguer [19].

2. Principio de selección de Helly. Aplicado por Grommer [24] y Hamburguer [19].

3. Análisis funcional. Maquinaria utilizada por Hausdorff [21] y M. Riesz [42] para extender funcionales lineales y enseguida aplicar teoremas de representación. Este desarrollo permitió la autonomía del problema de momentos respecto a las fracciones continuas.

4. Teoría de las funciones analíticas, herramienta usada por Nevanlinna [37].

5. Análisis armónico y análisis de Fourier. Usadas recientemente por Lin [30] y López-García [32, 33, 34, 35]. Lin dio una prueba corta del criterio de Krein y el segundo autor caracterizó familias de funciones que son soluciones a problemas de momentos.

En este trabajo ofrecemos una visión panóramica del problema de momentos junto con algunas referencias históricas. De particular interés es la historia personal de Stieltjes que reproducimos a continuación.

Sobre la vida de Stieltjes

Stieltjes (1856-1894) fue un matemático holandés que inició sus estudios en la Escuela Politécnica de Delft en 1873, pero se la pasó en la biblioteca leyendo a Gauss y a Jacobi en vez de asistir a sus clases, lo que ocasionó su fracaso en las evaluaciones. Stieltjes volvió a fallar en 1875 y en 1876, por lo que su padre, desesperado, le pidió ayuda a su amigo H. G. van de Sande-Bakhuyzen director del observatorio de Leiden. Así que Stieltjes fue contratado como asistente en el observatorio de Leiden en abril de 1877.

Tal vez el evento más significativo en la vida de Stieltjes, en lo que se refiere a las matemáticas, fue que el 8 noviembre de 1882 estableció correspondencia con Hermite [22], la cual se mantendría hasta la prematura muerte de Stieltjes (poco más de 12 años, lapso en el que intercambiaron 432 cartas). La razón original para escribirle era lo referente a su trabajo en mecánica celeste, sin embargo la correspondencia se volvió rápidamente hacia las matemáticas y Stieltjes empezó a dedicar su tiempo de ocio a la investigación matemática.

En enero de 1883, Sande-Bakhuyzen atendió la petición hecha por Stieltjes de disminuir su trabajo observacional y permitirle trabajar más en tópicos de matemáticas. Ese mismo año fue memorable para Stieltjes ya que se casó con Elizabeth Intveld; más allá de la importancia natural de este evento en su vida personal, lo fue más el hecho de que su esposa lo alentá abandonar su trabajo como astrónomo y dedicarse a las matemáticas. De septiembre a diciembre de 1883 Stieltjes impartió clases de geometría analítica y geometría descriptiva en la universidad de Delft, donde sustituyó a un profesor enfermo. Esto confirmó lo que debe haberse vuelto claro en la mente de Stieltjes: que las matemáticas eran la única carrera posible para él, así que en diciembre de 1883 renunció a su trabajo en el observatorio.

En enero de 1884 Stieltjes aplicó para una posición en Groningen, le escribió a Hermite: “Hace algunos días me ofrecieron una cátedra de análisis (cálculo diferencial e integral) en la Universidad de Groningen. He aceptado y creo que este puesto me permitirá ser más útil. Debo mucho, para la obtención de este puesto, a la extrema bondad de mi antiguo jefe Mr. Bakhuyzen, el director del observatorio. Algún día de estos, mi nombramiento será definitivo."

Sin embargo, pronto se desilusionaría, el 13 de marzo de 1884 le comunicó a Hermite: "La Facultad de Groningen me colocó en primer lugar para la vacante, pero el Ministro ha nombrado a uno de los otros. Probablemente la razón habrá sido que no tuve la oportunidad de seguir el camino estándar, por no haber recibido ningún grado de la universidad."

De hecho Stieltjes desconocía que la situación había sido más compleja. El comité de nombramientos elaboró una lista de tres nombres encabezada por Korteweg y con Stieltjes en segundo lugar. Se le ofreció el cargo a Korteweg, profesor de la universidad de Amsterdam, quien no se decidió a abandonar su hogar y declinó la propuesta. En esta etapa el comité configuró una segunda lista encabezada por Stieltjes y con Floris de Boer detrás. A pesar de que Stieltjes estaba aceptando la posición, en marzo de 1884 se emitió un decreto real designando a de Boer para el puesto.

Como se puede uno imaginar, Hermite se molestó al enterarse que, por la falta del grado, Stieltjes había sido descartado después de que le habían ofrecido el trabajo. En mayo de 1884 Hermite y Bierens de Haan delinearon un plan para proponer a Stieltjes para un grado honorario por la Universidad de Leiden. El senado de la universidad de Leiden registró la siguiente minuta: "El Rector reportó que se recibió una petición de la Facultad de Matemáticas y Física para conferir el grado de doctor honoris causa en Matemáticas y Astronomía al Sr. T. J. Stieltjes, un antiguo empleado del observatorio de Leiden. En nombre de la Facultad, el Sr. Lorentz explicó los méritos del Sr. Stieltjes e indicó las razones que condujeron a la propuesta. Se ha decidido llegar a una conclusión en la siguiente reunión del Senado."

Finalmente se acordó otorgarle a Stieltjes la distinción el 17 de junio de 1884, aunque por un malentendido no se presentó a la ceremonia pública. Posteriormente Stieltjes se desplazó con su familia a Paris en abril de 1885. Recibió su doctorado en ciencias en 1886 con una tesis sobre series semi-convergentes [44]. Ese mismo año fue asignado a la universidad de Toulouse, siendo nombrado para una cátedra de cálculo diferencial e integral en 1889.

El problema de momentos de Stieltjes

Sean $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ sucesiones de números complejos. Decimos que la fracción continua inducida por la sucesión de a_n y b_n converge al número complejo f si

$$f_n = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}} \to f$$

La fracción continua de funciones más asequible es la siguiente

$$f(z) = \cfrac{1}{b_1 z + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 z + \cfrac{1}{b_4 + \cdots}}}}. \tag{1}$$

Precisamente la memoria de Stieltjes [45] se dedica al estudio de la convergencia de tal fracción continua. El enfoque de Stieltjes hacia las fracciones continuas tal vez se originó por su interés en las series divergentes de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{x^n}. \tag{2}$$

Cuando Cauchy resaltó en 1821 que no se puede hablar de la suma de una serie divergente, los matemáticos se volvieron cuidadosos con su manipulación. Sin embargo, en muchas ramas de la física y en particular en mecánica celeste, se emplearon ampliamente las series divergentes. Para Stieltjes fue un desafío entender el porqué el uso de las series divergentes en muchos casos producían los resultados correctos, así que en su tesis doctoral [44] se dedicó al estudio de las series de la forma (2) que surgen naturalmente en el cálculo de las integrales definidas

$$\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2} du, \quad \int_0^\infty \frac{u\cos au}{1+u^2} du, \ a \in \mathbb{R}.$$

Desde 1748 Euler sabía que se puede transformar una serie infinita en una fracción continua y viceversa, así que era sensato pensar en un salto de las series divergentes de la forma (2) al estudio de fracciones continuas. Laguerre [28] fue el primero en señalar este hecho al integrar por partes la integral

$$I(x) = \int_x^\infty t^{-1}e^{-t}dt, \ x > 0,$$

para obtener

$$I(x) = e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \cdots \pm \frac{(n-1)!}{x^n}\right] \mp n!\int_x^\infty t^{-n-1}e^{-t}dt,$$

para todo $n \geq 1$. Si se continuara indefinidamente la integración por partes, se obtendría una serie que diverge para todo $x > 0$. No obstante, es posible escribir a $e^x I(x)$ como una fracción continua que es convergente:

$$I(x) = e^{-x}\cfrac{1}{x+1-\cfrac{1}{x+3-\cfrac{1}{\frac{x+5}{4}-\cfrac{1/4}{\frac{x+7}{9}-\cfrac{1/9}{\frac{x+9}{16}-\cdots}}}}}.$$

Como en el ejemplo anterior, a finales de 1880 Stieltjes expandió varias integrales en fracciones continuas de la forma (1) con $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Precisamente esta condición implica la existencia de una sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ que satisface

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{vmatrix} > 0 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n+1} \end{vmatrix} > 0, \qquad (3)$$

para todo $n \geq 0$.

Más aún, Stieltjes muestra que (3) es la condición que debe satisfacer una sucesión dada $(s_n)_{n\geq 0}$ para que el problema de momentos de Stieltjes respectivo tenga solución:

"El problema de momentos de Stieltjes relacionado a la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ tiene solución si y sólo si para todo $n \geq 0$ se cumple (3)."

Un excelente texto para profundizar sobre la teoría de fracciones continuas es [25]. ¿Qué se está haciendo actualmente? Hay publicaciones recientes que analizan condiciones de convergencia de fracciones continuas vectoriales, ver por ejemplo [13]. Como es de esperarse, la teoría de fracciones continuas tiene aplicaciones en varias áreas de la ciencia, en particular recomendamos el artículo de Muller [36], que podría tener aplicaciones en ingeniería mecánica, física nuclear y astrofísica. Otra aplicación impresionante se da en el contexto de la teoría de nudos: En 1970 Conway [14] asoció una fracción continua a cada ovillo racional y probó el ahora llamado teorema básico de Conway sobre ovillos racionales, que menciona que dos ovillos racionales son topológicamente equivalentes si y sólo si tienen asociada la misma fracción continua. Se puede encontrar una aplicación de esta maquinaria a la biología molecular (especifícamente en el estudio de la recombinación del DNA) en [17, 26].

Después de Stieltjes hubo intentos para extender su teoría a fracciones continuas cuyos coeficientes no fueran positivos. Edward Burr Van Vleck [50] tuvo un intento fallido y se aventuró a conjeturar que no era posible una extensión, sin embargo, Grommer [24] usó el principio de selección de Helly para obtener resultados parciales. Lo anterior mostró que eran necesarios nuevos métodos para vencer las dificultades presentadas. Hamburguer [19] utilizó como herramienta el método de Grommer, las fracciones continuas y la teoría de la integral de Stieltjes para encontrar soluciones al problema de momentos extendido a todo el eje real.

Dada una sucesión de números reales $(s_n)_{n\geq 0}$, a la matriz $(s_{i+j})_{0\leq i,j\leq n}$ se le conoce como la n-ésima matriz de Hankel. Así que Hamburguer probó que "el problema de momentos sobre $I = \mathbb{R}$ relacionado a la sucesión" $(s_n)_{n\geq 0}$ tiene solución si y sólo si para todo $n \geq 0$ se cumple que
el determinante de cada n-ésima matriz de Hankel es positivo. En 1923 M. Riesz [42], inspirado por el teorema de representación de su hermano F. Riesz, probó el mismo resultado usando un método que eventualmente fue llamado el teorema de Hahn-Banach, sentando así las bases del análisis funcional. Con este enfoque, el problema de momentos se separa finalmente de las fracciones continuas.

Una vez que estableció la existencia de soluciones al problema de momentos sobre $\mathbb{R}$ relacionado a $(s_n)_{n\geq 0}$, Hamburguer probó que la solución es única si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\det\,(s_{i+j})_{0\leq i,j\leq n}}{\det\,(s_{i+j})_{2\leq i,j\leq n}} = 0. \tag{4}$$

Más recientemente Berg, Chen e Ismail [5] probaron que el problema de momentos de Hamburguer relacionado a $(s_n)_{n\geq 0}$ es determinado si y sólo si el valor propio más pequeño de la n-ésima matriz de Hankel

$(s_{i+j})_{0\leq i,j\leq n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Con los criterios dados por Stieltjes y Hamburguer podemos decir por ejemplo que si $s_n = e^n$ o $s_n = e^{-n}$, el problema de momentos de Stieltjes (o de Hamburguer) relacionado no tiene solución, ya que todos los renglones de la n-ésima matriz de Hankel son múltiplos del primer renglón. Por el contrario, si $s_n = e^{n^2/2}$, el problema de momentos de Stieltjes relacionado tiene solución, ver (10). También si $s_{2n+1} = 0$ y $s_{2n} = \frac{2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2n+1}{\alpha}\right)$ para todo $n \geq 0$, $\alpha > 0$, el problema de momentos de Hamburguer relacionado tiene solución, ver (8), donde Γ es la función gama definida como sigue

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\ x > 0.$$

La cuestión es que no es fácil verificar las condiciones respectivas que hablan acerca de la unicidad del problema de momentos. Sin embargo, en su tratado de funciones cuasi-analíticas de 1926, Carleman [12] probó un criterio más accesible pero con la desventaja que sólo es una condición suficiente (pero no necesaria) para que el problema de momentos tenga solución única: “El problema de momentos de Hamburguer relacionado a $(s_n)_{n\geq 0}$ es determinado si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{s_{2n}}} = \infty. \tag{5}$$

Existe un criterio similar para el problema de momentos de Stieltjes: solo se reemplaza s_{2n} por s_n en la igualdad anterior. Más adelante daremos ejemplos de sucesiones $(s_n)_{n\geq 0}$ que cumplen la igualdad anterior.

El problema de momentos de Hausdorff

Cuando Hausdorff se encontraba estudiando algunos métodos de sumabilidad se encontró con el problema de momentos sobre $[0,1]$ y lo resolvió en 1921 usando la teoría de fracciones continuas, ver [20]. En el mismo artículo mencionó que el problema se podía resolver de una manera simple sin extensas preparaciones algebraicas, y fue precisamente lo que probó Hausdorff [21] en 1923: “El problema de momentos sobre $[0,1]$ relacionado a la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ tiene solución si y sólo si la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ es completamente monótona, es decir

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} s_{i+j} > 0, \tag{6}$$

para todo $j, n \geq 0$".

¿Qué se ha hecho últimamente en el contexto de este problema? Se ha formulado y probado una generalización del problema de momentos de Hausdorff para sucesiones dobles difusas. Recomendamos al lector revisar el artículo de Duchoň y Debiève [16].

Es fácil establecer la unicidad del problema de momentos de Hausdorff: Si f y g son funciones continuas en $[0,1]$ tal que

$$\int_0^1 x^n f(x)\, dx = \int_0^1 x^n g(x)\, dx, \text{ para todo } n \geq 0,$$

por la linealidad de la integral y el teorema de aproximación de Stone-Weierstrass se ve que se anula la integral de $(f-g)^2$ sobre $[0,1]$, por lo tanto $f \equiv g$. Además el resultado es válido con dF, en vez de dx, donde F es una función de variación acotada en $[0,1]$.

El criterio de Krein

En general, si una función integrable f es la única solución a un problema de momentos sobre un intervalo I, entonces f está determinada por su sucesión de momentos, i.e. si g es una función integrable tal que $s_n(f) = s_n(g)$ para todo $n \geq 0$, entonces $f \equiv g$ en I, y decimos que f es determinada; si f no es la única solución al problema de momentos relacionado con $(s_n(f))_{n\geq 0}$, entonces se dice que f es indeterminada. De la sección anterior se sigue que las soluciones a los problemas de momentos de Hausdorff están determinadas por su sucesión de momentos. ¿Lo mismo ocurre cuando consideramos $I = (0,\infty)$ o $I = \mathbb{R}$? No necesariamente, y más adelante damos algunos ejemplos.

Si f es una función integrable sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $(0,\infty)$) tal que $s_n(f) < \infty$ para todo $n \geq 0$, entonces f es una solución al problema de momentos relacionado a $(s_n(f))_{n\geq 0}$. Si tal sucesión satisface además el criterio de Carleman (5) entonces f es determinada. En este mismo contexto, Krein [27] mostró en 1945 que "si f es una función positiva e integrable sobre $\mathbb{R}$ tal que $s_n(f) < \infty$, para todo $n \geq 0$, y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(f(x))}{1+x^2} dx > -\infty, \tag{7}$$

entonces f es indeterminada."

La desventaja del ahora llamado criterio de Krein es que ofrece una condición suficiente (pero no necesaria) para que f sea indeterminada; la ventaja es que sólo se tiene que evaluar una integral y evitar el criterio más complejo dado en (4).

Se han dado varias pruebas de este resultado, pero en 1997 Lin [30] usó la teoría de espacios de Hardy (en el semiplano superior $\mathbb{R}^2_+$) para presentar una que es elegante y corta. En este sentido podemos plantearnos las siguientes preguntas: ¿Existe un criterio similar a (7) en el problema de momentos multidimensional? ¿Habrá una relación con los espacios de Hardy en los semiespacios multidimensionales? ¿Aparecerán las tranformadas integrales de Riesz?

Ahora aplicamos la maquinaria desarrollada. Para $\alpha > 0$ definimos la función $f_\alpha(x) = \exp(-|x|^\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$. Los momentos impares de f_α son cero y un cambio de variable muestra que

$$s_{2n}(f) = \frac{2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2n+1}{\alpha}\right) < \infty, \tag{8}$$

para todo $n \geq 0$. Si $\alpha < 1$ entonces f_α satisface (7) por lo que es indeterminada.

El mismo Lin probó que al imponer ciertas condiciones adicionales a la función f, se puede obtener que la desigualdad (7) también es necesaria para que f sea indeterminada: "sea f una función positiva e integrable en $\mathbb{R}$ con sucesión de momentos $(s_n(f))_{n\geq 0}$, que además es par y diferenciable. Supongamos que existe $x_0 \geq 0$ tal que f es decreciente a cero y $-xf'(x)/f(x)$ es creciente a infinito cuando $x_0 < x \to \infty$. Supongamos que

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(f(x))}{1+x^2}dx = \infty, \tag{9}$$

entonces f es determinada."

La demostración se basa en mostrar que bajo tales hipótesis la sucesión $(s_n(f))_{n\geq 0}$ satisface el criterio de Carleman (5). A partir de esta observación y el resultado recién mencionado, podemos ver que para cada $\alpha \geq 1$ la sucesión de momentos de la función $f_\alpha(x) = \exp(-|x|^\alpha)$ satisface (5) y por lo tanto f_α es determinada.

En [41] se pueden encontrar ejemplos de funciones indeterminadas que satisfacen (9). Es un reto debilitar las condiciones del criterio de Lin.

También existen los criterios correspondientes a $I = (0, \infty)$, los cuales son similares a los mostrados salvo que se debe poner $f(x^2)$ en las integrales anteriores e integrar sobre $(0, \infty)$, consultar [30] para más detalles.

Gut [18], Lin [31], Stoyanov [46], son algunos autores que han explotado los criterios de Krein y de Lin para concluir que ciertas funciones de densidad de variables aleatorias positivas son (in)determinadas, incluyendo por ejemplo: la función gama generalizada, la función Gaussiana inversa generalizada, y en general funciones de la forma $u \exp(-v)$.

Pedersen [41] probó en 1998 una generalización del criterio de Krein y además dio un resultado similar al criterio de Krein para medidas discretas que tienen sucesión de momentos finita.

Estos son los resultados conocidos que abordan el punto acerca de la (no) unicidad de soluciones a problemas de momentos en $(0,\infty)$ y $\mathbb{R}$.

El problema de momentos de la log-normal

Stieltjes presentó el primer ejemplo de una función indeterminada en $(0,\infty)$. Para ello consideremos la llamada densidad log-normal dada como sigue:

$$f_S(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-(\ln x)^2/2\right), \; x>0.$$

Haciendo el cambio de variable $y = n - \ln x$, $n \in \mathbb{Z}$, obtenemos que

$$\int_0^\infty x^n f_S(x)\, dx = e^{n^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = e^{n^2/2}, \text{ y} \tag{10}$$

$$-\int_0^\infty x^n f_S(x) \operatorname{sen}(2\pi \ln x)\, dx = e^{n^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \operatorname{sen}(2\pi y)\, dy = 0.$$

Así, las funciones no negativas f_S y $f_S \times (1 \pm h)$ están definidas en $(0,\infty)$ y tienen la misma sucesión de momentos, donde $h(x) = \operatorname{sen}(2\pi \ln x)$. Es decir, el problema de momentos de Stieltjes relacionado con la sucesión $\left(e^{n^2/2}\right)_{n\geq 0}$ es indeterminado y se le conoce como el problema de momentos de la log-normal.

Para $0 \leq c < 1$, $0 < q < 1$, introducimos la siguiente función

$$g_c(x) = \frac{x^{c-1}}{M_c(q;q)_\infty \left(-q^{-c+1/2}x;q\right)_\infty \left(-q^{c+1/2}x^{-1};q\right)_\infty}, \tag{11}$$

donde M_c es la constante que hace $\int_0^\infty g_c(x)dx = 1$, y por definición $(p;q)_\infty = \prod_{n=0}^\infty (1-pq^n)$. Es bien conocido que cada función g_c es solución del problema de momentos de la log-normal cuando $q = e^{-1}$. ¿Cuál es la justificación de este hecho? Podemos decir que inicialmente sólo fue producto de la observación, en las tablas de integrales, del cálculo del llamado q-análogo de la integral beta usual; aunque posteriormente Berg [3] lo justificó de una manera sistemática.

¿Qué tienen en común todas las funciones mencionadas hasta ahora en esta sección? Chihara [7, 8] y Christiansen [11] notaron que f_S y $f_S \times (1 \pm h)$ satisfacen la ecuación funcional

$$f(qx) = q^{\beta-1/2} x f(x),\ x > 0, \tag{12}$$

con $\beta = 0$, $q = e^{-1}$, y que g_c también la satisface con $\beta = 0$, $0 < q < 1$.

Si f es una función integrable que satisface la ecuación funcional (12) con $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, usando inducción notamos que

$$q^n f(q^n x) = q^{n^2/2+n\beta} x^n f(x),$$

para todo $x > 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Al integrar ambos miembros de la igualdad anterior obtenemos que $s_n(f) = q^{-(n+\beta)^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}$, siempre que $\int_0^\infty f(x)dx = q^{-\beta^2/2}$. Es decir, f es solución al problema de momentos de Stieltjes relacionado a la sucesión $\left(q^{-(n+\beta)^2/2}\right)_{n\geq 0}$.

En el 2009 se caracterizó en [33] a la colección de todas las soluciones de la ecuación funcional (12). Aquí surge una pregunta natural: ¿existen funciones con sucesión de momentos $\left(q^{-(n+\beta)^2/2}\right)_{n\geq 0}$ que no satisfacen la ecuación funcional (12)? En el mismo artículo se da una respuesta afirmativa.

La forma $f_S \times (1 \pm h)$ en la que aparece escrita la solución de Stieltjes se puede ver como parte de una estructura más general introducida por Stoyanov [47, 48, 49], y que sirve para encontrar familias de soluciones a problemas de momento indeterminado. Referimos al lector también a [40].

Estos resultados responden parcialmente el tercer punto de nuestro listado inicial. De hecho, existe una teoría general que resuelve este punto y que abordamos a continuación.

La parametrización de Nevanlinna

A partir de este momento consideramos medidas positivas generales μ definidas sobre (los borelianos de) $\mathbb{R}$. El n-ésimo momento de μ está definido como sigue

$$s_n(\mu) = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x),\ n \geq 0.$$

Decimos que μ es una solución al problema de momentos de Hamburguer relacionada con la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$, si $s_n(\mu) = s_n$ para todo $n \geq 0$.

Sea μ una medida positiva con momentos $(s_n)_{n\geq 0}$. Introducimos una sucesión de polinomios $(P_n)_{n\geq 0}$ como sigue

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix},$$

donde D_n es el determinante de la n-ésima matriz de Hankel $(s_{i+j})_{0\leq i,j\leq n}$, $n \geq 1$ y $P_0 = 1/\sqrt{s_0}$, $D_0 = s_0$.

También consideramos los polinomios de la segunda clase Q_n definidos como

$$Q_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} d\mu(y),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. Es fácil ver que P_n y Q_n son polinomios de grado n y $n-1$ respectivamente.

Hamburguer probó que el problema de momentos relacionado a (s_n) es indeterminado si y sólo si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(P_n(x)^2 + Q_n(x)^2\right) < \infty.$$

Ahora supongamos que la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ es tal que el problema de momentos relacionado es indeterminado. Definimos

$$\mathcal{V}_{(s_n)} = \{\mu \text{ es solución del problema de momentos relacionado a } (s_n)\}.$$

Claramente $\mathcal{V}_{(s_n)}$ es un conjunto convexo y por lo tanto infinito (pues contiene más de un elemento), además se le puede dotar de una topología compacta. El problema de describir al conjunto $\mathcal{V}_{(s_n)}$ fue resuelto por Nevanlinna [37] en 1922 usando la teoría de funciones complejas y a continuación mostramos el resultado.

Decimos que φ está en la clase de Pick $\mathcal{P}$ si es holomorfa en el semiplano superior $\mathrm{Im}z > 0$ y $\mathrm{Im}\varphi(z) \geq 0$ para $\mathrm{Im}z > 0$. Al reflejar respecto al eje real, cualquier función en $\mathcal{P}$ se puede extender como una función holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Nevanlinna probó que $\mathcal{V}_{(s_n)}$ se puede parametrizar por medio de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$, donde $\mathcal{P}$ hereda la topología de la convergencia normal (i.e. convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$). La parametrización es establecida mediante el homeomorfismo $\varphi \mapsto \mu_\varphi$ de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ sobre $\mathcal{V}_{(s_n)}$ dada por

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\varphi(t)}{t-z} = -\frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)}, \; z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= z\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(0)\,Q_k(z)\,,\ C(z) = 1 + z\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0)\,Q_k(z)\,, \\ B(z) &= -1 + z\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(0)\,P_k(z)\,,\ D(z) = z\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0)\,P_k(z)\,. \end{aligned}$$

Debemos notar que esta caracterización adolece del hecho de que las medidas no están dadas de manera explicíta. En cierto sentido, resolver un problema de momento indeterminado de Hamburguer significa encontrar las funciones A, B, C y D en términos de funciones bien conocidas, para luego usar la fórmula de inversión de Stieltjes-Perron y obtener μ_φ. En este sentido es que es importante el resultado que caracteriza las soluciones de la ecuación funcional (12), ya que son soluciones a problemas de momento indeterminado que están dadas de manera explicíta.

En particular, si

$$\varphi(z) = t,\ \operatorname{Im} z \neq 0,$$

para $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces μ_φ es una medida discreta de la forma

$$\mu_t = \sum_{x\in\Lambda_t} \rho(x)\,\delta_x,$$

donde Λ_t denota el conjunto de ceros de la función $x \mapsto B(x)\,t - D(x)$ (o $x \mapsto B(x)$ si $t = \infty$), la función $\rho : \mathbb{R} \to (0,1)$ está dada por

$$\frac{1}{\rho(x)} = B'(x)\,D(x) - B(x)\,D'(x)\,,\ x \in \mathbb{R},$$

y δ_x denota la masa unitaria en el punto x.

Como es de esperarse, también existe la correspondiente parametrización de las soluciones a un problema de momentos indeterminado de Stieltjes, con los elementos análogos. En este contexto, Christiansen [10] calculó las funciones holomorfas A, B, C, D correspondientes a la parametrización de Nevanlinna de las soluciones del problema de momentos de la log-normal.

Ahora consideramos $q \in (0,1)$ fijo. Para cada $a \in \mathbb{R}$, la medida discreta H_a dada por

$$H_a = \frac{1}{c(a)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^k q^{k^2/2} \delta_{aq^k},$$

donde

$$c(a) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^k q^{k^2/2},$$

es una solución al problema de momentos de la log-normal. Esto es claro, ya que

$$\begin{aligned} s_n(H_a) &= \frac{1}{c(a)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^k q^{k^2/2} \left(aq^k\right)^n \\ &= \frac{q^{-n^2/2}}{c(a)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^{k+n} q^{(k+n)^2/2} = q^{-n^2/2}, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. En 1998 Berg [3] usó integración vectorial para obtener las funciones en (11) a partir de la familia $\{H_a\}_{a>0}$. En el mismo año Berg [4] encontró otra familia de medidas discretas que son soluciones para el problema de la log-normal:

$$\mu_s = \frac{1}{c(q^{1/2})} \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{k^2/2+k/2} \left(1 + s(-1)^k\right) \delta_{q^{k+1/2}}, \ \ s \in [-1, 1],$$

esto se sigue de la identidad fácil de verificar

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k q^{k^2/2+k/2} = 0.$$

En el 2003 Christiansen [10] desarrolló un nuevo método que le permitió encontrar otras medidas discretas que son soluciones del problema de momento de la log-normal.

Aplicaciones

Consideremos un espacio de probabilidad (Ω, F, P) y $X : \Omega \to [0, \infty)$ una función integrable. La función de distribución de X está dada como sigue

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}).$$

Supongamos que F es una función absolutamente continua, es decir, existe una función integrable no negativa f con soporte en $[0, \infty)$ tal que

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

y decimos que f es la función de densidad de X. Sea $\widehat{X} : \Omega \to [0, \infty)$ una función medible con la siguiente función de distribución

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{s_1(f)} \int_0^x t f(t)\, dt.$$

En este caso a $\widehat{X}$ se le conoce como la versión-medida de X. Es bien conocido que $\widehat{X}$ es el tiempo de vida total estacionario en un proceso de renovación con tiempo de vida genérico X (ver [15, Capítulo 5]).

Esta clase de distribuciones se aplican en distintas áreas del conocimiento, tales como biometría, ecología, ciencias ambientales, análisis de seguridad y sobrevivencia (ver por ejemplo [29]).

En [38], Pakes y Khattree se cuestionan si es posible reescalar aleatoriamente el tiempo de vida total para recuperar la ley del tiempo de vida. Más específicamente, sea $V \geq 0$ una función medible definida sobre Ω independiente (en el sentido que se usa en probabilidad) de X y tal que $P(\{\omega : V(\omega) > 0\}) > 0$. ¿Cuándo la función de distribución F coincide con la función de distribución de $V\widehat{X}$?

Cuando V es una función constante, Pakes dió una respuesta en [39], pero es un resultado que no es completamente satisfactorio. Supongamos que $V \equiv q \in (0, 1)$. En este caso particular el problema se reduce a caracterizar las funciones integrables f que satisfacen la ecuación funcional

$$\int_0^x f(y)\, dy = \frac{1}{s_1(f)} \int_0^{x/q} y f(y)\, dy,$$

que por el teorema de diferenciación de Lebesgue es equivalente a caracterizar las funciones integrables que satisfacen la siguiente ecuacion funcional

$$s_1(f)\, q f(qx) = x f(x), \ \textit{c.d. } x > 0,$$

la cual es similar a la ecuación funcional (12).

En [6], Bertoin et ál. analizan una función integrable Y que surge en el estudio de funcionales exponenciales de procesos de Poisson; ellos muestran que $\int Y d\omega = q^{-1}$ y que las funciones $q\widehat{Y}, Y$ y $q^{-1}Y^{-1}$ tienen la misma función de densidad. Este trabajo tiene conexión con un modelo probabilístico de la duplicación del DNA, así como con la existencia de una medida invariante relacionada a un protocolo de control de transmisión.

A partir de este ejemplo, en el 2010 se caracterizó en [35] a las funciones integrables positivas X cuya función de densidad coincide con las de $q\widehat{X}$ y $q^{-1}X^{-1}$.

Otra aplicación que vale la pena mencionar es la que aparece en [9], donde se muestra que se puede dar la solución a un problema de control admisible en términos de una solución de un problema de momentos de Hausdorff.

Conclusiones

Hemos hecho una síntesis del desarrollo histórico del problema de momentos y hemos mencionado algunos autores que contribuyeron a su crecimiento. Este trabajo no pretende ser exhaustivo, por lo que seguramente hemos dejado de lado temas relacionados. Finalmente, se han puesto referencias clásicas y modernas, a elección del lector, que reflejan el interés de este autor. Agradezco profundamente las sugerencias de los revisores, las cuales mejoraron considerablemente el presente escrito.

Referencias

[1] Akhiezer N. I., The classical moment problem and some related questions in analysis, Hafner Publishing Co., New York, 1965.

[2] Berg C., Indeterminate moment problems and the theory of entire functions, J. Comput. Appl. Math. 65 (1995), no. 1, 27–55.

[3] Berg C., From discrete to absolutely continuous solutions of indeterminate moment problems, Arab. J. Math. Sci. 4, 1998, 1–18.

[4] Berg C., On some indeterminate moment problems for measures on a geometric progression, Journal of Computational and Applied Mathematics 99 (1998) 67–75.

[5] Berg C., Chen Y., Ismail M. E. H., Small eigenvalues of large Hankel matrices: the indeterminate case, Math. Scand. 91 (2002), no. 1, 67–81.

[6] Bertoin J., Biane P., Yor M., Poissonian exponential functionals, q-series, q-integrals, and the moment problem for log-normal distributions, Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV, (2004), 45–56, Progr. Probab., 58, Birkhauser, Basel.

[7] Chihara T. S., A characterization and a class of distributions functions for the Stieltjes-Wigert polynomials, Canadian Math. Bull. 13 (1970), 529–532.

[8] Chihara T. S., On generalized Stieltjes-Wigert and related orthogonal polynomials, J. Comput. Appl. Math. 5 (1979), no. 4, 291–297.

[9] Choque-Rivero A. E., Korobov V., Skylar G., The admissible control problem from the moment problem point of view, Applied Mathematics Letters 23 (2010), 58–63

[10] Christiansen J. S., The moment problem associated with the Stieltjes-Wigert polynomials, J. Math. Anal. Appl. 277 (2003), no. 1, 218–245.

[11] Christiansen J. S., The moment problem associated with the q-Laguerre polynomials, Constr. Approx. 19 (2003), 1–22.

[12] Carleman T., Les fonctions quasi analytiques, Collection Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[13] Castro S. M., Convergence conditions for vector Stieltjes continued fractions, J. Approx. Theory 115 (2002), no. 1, 100–119.

[14] Conway J. H., An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. 1970 Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967) pp. 329–358 Pergamon, Oxford

[15] Cox D. R., Renewal theory, Methuen & Co. Ltd., London; John Wiley & Sons, Inc., New York 1962 ix+142 pp.

[16] Duchoň M., Debiève C., Moment problem for double fuzzy sequences, Tatra Mt. Math. Publ. 40 (2008), 185–192.

[17] Goldman J. R., Kauffman L. H., Rational tangles. Adv. in Appl. Math. 18 (1997), no. 3, 300–332.

[18] Gut A., On the moment problem, Bernoulli, 8 (3) (2002), 407–421.

[19] Hamburguer H., Über eine Erweiterung des Stieljesschen Momentenproblems I-III, Math. Ann. 81 (1920) 235–319, 82 (1921) 120–164, 82 (1921) 168–187.

[20] Hausdorff F., Summationsmethoden und Momentenfolgen, Math. Z. 9 (1921), 74–109, 280–299.

[21] Hausdorff F., Momentenprobleme für ein endliches Intervall, Math. Z. 16 (1923), 220–248.

[22] Hermite Ch., Correspondance d´Hermite et de Stieltjes, I y II. Paris: Gauthier-Villars.

[23] Hoff T., The early history of the moment problem, Historia Mathematica 20 (1993), 19–44.

[24] Grommer J., Ganze tranzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 144 (1914) 114–166.

[25] Jones W. B., Thron W. J., Continued fractions. Analytic theory and applications. Enciclopedia of Mathematics and its Applications, 11. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. 1980.

[26] Kauffman, L. H., Lambropoulou, S., On the classification of rational tangles. Adv. in Appl. Math. 33 (2004), no. 2, 199–237.

[27] Kreĭn M. G., On a problem of extrapolation of A. N. Kolmogoroff, Acad. Sci. URSS 46 (1945), 306–309.

[28] Laguerre E., Sur L'intégrale $\int_x^\infty e^{-x}x^{-1}dx$, Bulletin de la société mathématique de France 7 (1879), 72–81.

[29] Leyva V., Sanhueza A., Angulo J. M., A length-biased version of the Birnbaum-Saunders distribution with application in water quality, Stoch. Environ Res Risk Asses (2009) 23:299–307, doi:10.1007/s00477-008-0215-9.

[30] Lin G. D., On the moment problems, Statist. Probab. Lett. 35 (1997) 85–90.

[31] Lin G. D., The cube of a logistic distribution es indeterminate, Austral. J. Statistic. 34 (1997) 307–322.

[32] Gómez R., López-García M., A family of heat functions as solutions of indeterminate moment problems, Int. J. Math. Math. Sci., vol. 2007, Article ID 41526, 11 pages, doi:10.1155/2007/41526.

[33] López-García M., Characterization of solutions to the log-normal moment problem, por aparecer en Theory of Probability and its Applications.

[34] López-García M., Characterization of solutions to the Stieltjes-Wigert moment problem, Statistics and Probability Letters 79 (2009), 1337–1342.

[35] López-García M., Characterization of distributions with the length-bias scaling property. Electron. Commun. Probab. 14 (2009), 186–191

[36] Muller H., Fractal scaling models of resonant oscillations in chain systems of harmonic oscillators, Progress in Physics, vol. 2, April (2009), 72–76.

[37] Nevanlinna R., Asymptotische Entwickelungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem, Ann. Acad. Sci. Fenn A 18 (1922), no. 5.

[38] Pakes A. G., Khattree, R., Length-biasing, characterization of laws, and the moment problem, Austral. J. Statist. 34 (1992), 307–322.

[39] Pakes A. G., Length biasing and laws equivalent to the log-normal, J. Math. Anal. Appl. 197 (1996), 825–854.

[40] Pakes A. G., Structure of Stieltjes classes of moment-equivalent probability laws, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), 1268–1290.

[41] Pedersen H. L., On Krein's theorem for indeterminacy of the classical moment problem. J. Approx. Theory 95 (1998), no. 1, 90–100.

[42] Riesz M., Sur le problème des moments. Troisième Note, Arkiv for matematik, astronomi och fysick 17 (1923), no. 16.

[43] Shohat J. A., Tamarkin J. D., The problem of moments, American Mathematical Society Mathematical surveys, vol. II, New York, 1943.

[44] Stieltjes T.J., Recherches sur quelques séries semi-convergentes, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 3, 3 (1886), 201–258.

[45] Stieltjes T.J., Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Sci. Toulouse 8, 1894, 1–122; Ann. Fac. Sci. Toulouse 9, 1895, 5-47; Versión en inglés contenida en T.J. Stieltjes, Collected Papers, G. van Dijk (Ed.), Vol. II, Springer, Berlin, 1993.

[46] Stoyanov J., Krein condition in probabilistic moment problems, Bernoulli 6 (2000) 939–949.

[47] Stoyanov J., Stieltjes classes for moment indeterminate probability distributions, J. Appl. Probab. 41A (2004), 281–294.

[48] Stoyanov J., Tolmatz L., Method for constructing Stieltjes classes for M-indeterminate probability distributions, Appl. Math. Comput. 165 (2005) 669–685.

[49] Stoyanov J., Tolmatz L., New Stieltjes classes involving generalized gamma distributions, Statist. Probab. Letters (2004) 213–219.

[50] Van Vleck E., On an extension of the 1894 memoir of Stieltjes. Transactions of the American Mathematical Society 4 (1903), 297–332.