MisceláNEA MATEMÁTICA **71** (2021) 41-52 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7105

Coloraciones consecutivas en gráficas y digráficas

Nahid Yelene Javier Nol
Universidad Nacional Autonoma de Mexico
Ciudad de Mexico
nahidjaviernol@gmail.com
y
Rita Zuazua
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de Mexico
ritazuazua@ciencias.unam.mx

1. Introducción

En este artículo consideramos un concepto de coloraciones en gráficas, las coloraciones consecutivas en aristas, y lo extendemos a la definición de coloraciones consecutivas de flechas en digráficas. Una coloración propia por aristas de G se dice consecutiva si para todo vértice $v \in V(G)$, el conjunto de colores de las aristas incidentes al vértice $v \in V(G)$ forman un intervalo de enteros. Si una gráfica G tiene una coloración consecutiva decimos que G es consecutivamente coloreable. El concepto de gráfica continuamente coloreable (o coloreable por intervalos), fue definido en 1987 por Asratian y Kamalian [1] y después (llamado coloraciones consecutivas) estudiado por K. Giaro, M. Kubale y M. Małafiejski [8]. Es importante notar que no todas las gráficas son consecutivamente coloreables, de hecho el ejemplo de gráfica de orden más pequeño que no es consecutivamente coloreable es el ciclo C_3.

Una coloración consecutiva de una digráfica D es aquella en la que para todo vértice $v \in V(D)$ se cumple que al colorear todas las flechas que inician en v esta coloración forma un intervalo de enteros y al colorear todas las flechas que terminan en v tal coloración forma un intervalo de enteros.

En la sección 2 damos la motivación del estudio de coloraciones consecutivas y algunos conceptos básicos que nos servirán de apoyo para el

Palabras clave: Gráficas, digráficas, coloraciones.

entendimiento de este artículo. En la sección 3 abordamos el concepto de índice cromático el cuál tomamos como punto de partida para introducir la sección 4 de coloraciones consecutivas en gráficas. En la sección 5 se mencionan los resultados más recientes referentes al tema de coloraciones consecutivas en digráficas y se enuncia la conjetura: Para toda gráfica G existe D una orientación de G tal que D es consecutivamente coloreable, véase [6].

2. Motivación y conceptos básicos

Una gráfica es bipartita si el conjunto de vértices tiene una partición en dos conjuntos X y Y, tal que toda arista tiene un extremo en X y otro en Y. A X y Y se les llama conjuntos independientes de vértices.

La motivación para la definición y estudio de las coloraciones consecutivas en gráficas surgió del problema de la asignación de horarios a una comunidad de profesores y alumnos donde ambos grupos querían organizar sus horarios de clase sin interrupciones u horas muertas. Esta situación se modela mediante una gráfica bipartita donde un conjunto de vértices lo forman los profesores y el otro conjunto los alumnos. Cada color en las aristas representa una hora, es claro que si la coloración es consecutiva cada alumno y cada profesor no tendrá horas libres, con lo que se optimizará su tiempo. Más tarde, este concepto se extendió a todas las gráficas, desafortunadamente la información de quien era el profesor y quien el alumno se perdía.

En general seguimos los conceptos y terminología de [3] y [4] de digráficas y gráficas, respectivamente.

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Si a, b son números enteros positivos y $a < b$, entonces $[a, b]$ es el intervalo de enteros $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$. Una función $c : E(G) \to \mathbb{N}$ es una coloración propia por aristas de G si para todo par de aristas $e_1 = \{u, v\}, e_2 = \{v, w\}$ incidentes a un vértice v de G, $c(e_1) \neq c(e_2)$. A la imagen bajo c de una arista $e \in E(G)$ la llamaremos el color de e. El grado máximo de una gráfica lo denotamos como $\Delta(G)$.

Una digráfica $D = (V(D), A(D))$ consiste de un conjunto finito no vacío $V(D)$ de elementos llamados vértices y un conjunto finito $A(D)$ de pares ordenados de vértices distintos llamados flechas. El orden de una digráfica D es el número de vértices, $|V(D)|$.

Consideremos $v \in V(D)$ la exvecindad de v, $N_D^+(v) = \{u \in V(D) : (v, u) \in A(D)\}$. Similarmente, la invencidad de v, $N_D^-(v) = \{w \in V(D) : (w, v) \in A(D)\}$. Cuando no haya lugar a ambigüedades sobre la digráfica D, simplemente escribiremos $N^+(v)$ y $N^-(v)$. El exgrado de un vértice v, se define como $d^+(v) = |N^+(v)|$, similarmente tenemos el ingrado de v, definido como $d^-(v) = |N^-(v)|$.

Podemos obtener una digráfica D de una gráfica simple G, es decir, una gráfica sin lazos ni aristas múltiples, reemplazando cada arista $\{u, v\}$ por una y solo una de las posibles flechas, es decir por la flecha (u, v) o (v, u). Tal digráfica es llamada una orientación de G. A una orientación de G la llamamos una gráfica orientada.

3. Índice cromático

Al hablar de coloraciones de una gráfica G uno puede referirse a colorear vértices, aristas o ambos. En el presente artículo nos centraremos en coloraciones de aristas.

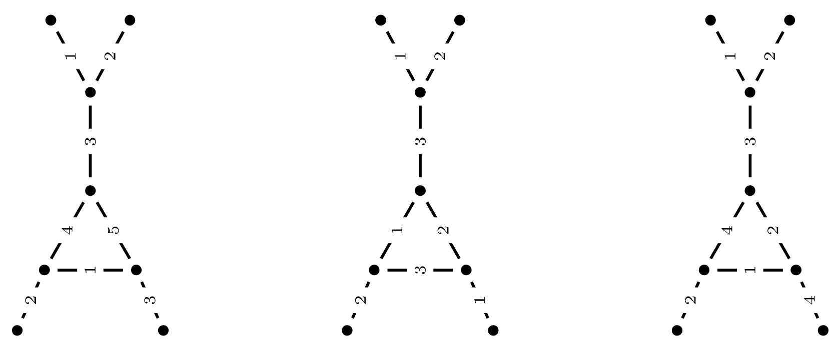

Figura 1. Coloraciones en aristas de la gráfica H.

La figura 1 muestra tres coloraciones en aristas de la gráfica H. La coloración de la gráfica de la izquierda utiliza 5 colores, mientras que la gráfica del centro utiliza solo 3 colores y la de la derecha usa 4 colores. Entonces una pregunta natural es ¿Cuál es la mejor coloración en aristas de una gráfica G? Lo que da lugar a introducir el concepto de índice cromático (o número crómatico en aristas) de G: denotamos por $\chi'(G)$ el menor entero k tal que G es k coloreable en aristas. Considerando las coloraciones de la gráfica H mostradas en la figura 1 tenemos que el índice cromático de H, $\chi'(H) = 3$.

El índice cromático ha sido estudiado desde hace varias décadas; una de las preguntas más interesantes en esta dirección fue ¿qué tanto puede crecer este parámetro?, es decir, ¿existirá alguna cota inferior y/o superior del índice cromático?

En 1964 el matemático ruso Vandim G. Vizing [7] demostró que toda gráfica simple G, satisface que

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Este resultado es considerado uno de los teoremas principales en el problema de coloraciones de aristas en gráficas. El teorema de Vizing nos da la siguiente clasificación de gráficas, de acuerdo a su grado máximo:

Considere G una gráfica, diremos que la gráfica G es

Clase 1: si $\chi'(G) = \Delta(G)$,
Clase 2: si $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

El problema de clasificar a las gráficas de acuerdo a su índice cromático es muy complicado.

En [11] Holyer demostró que es un problema NP-completo determinar el índice cromático de una gráfica arbitraria. Dicho de manera coloquial, no se conoce un algoritmo en tiempo polinomial que permita decidir si una gráfica pertenece a la clase 1 o a la clase 2.

Decimos que una gráfica G es plana si puede dibujarse en el plano sin que sus aristas se crucen. En [15] Vizing demostró que si G es una gráfica plana, entonces

- G es de clase 1, si $\Delta(G) \geq 8$;
- G es de clase 2, si $\Delta(G) \in \{2, 3, 4, 5\}$.

y conjeturó que G es de clase 1 si $\Delta(G) \in \{6, 7\}$. El caso $\Delta(G) = 7$ fue demostrado por Zhang [16] e independientemente por Sanders y Zhao [13]. El caso $\Delta(G) = 6$ aún sigue abierto.

4. Coloraciones consecutivas en gráficas

Antes de introducir la definición de coloraciones consecutivas en aristas, es conveniente mencionar el ejemplo siguiente. Considere el ciclo de orden tres, C_3, en la figura 2 podemos ver que tiene índice cromático $\chi'(C_3) = 3$. El conjunto de aristas $E(C_3) = \{\{x, z\}, \{x, y\}, \{y, z\}\}$ tiene los colores 3, 1 y 2, respectivamente. Las aristas incidentes en el vértice x tienen el conjunto de colores $\{1, 3\}$ las aristas incidentes en el vértice y tienen el conjunto de colores $\{1, 2\}$ y las aristas incidentes en el vértice z tienen el conjunto de colores $\{2, 3\}$. Así los colores asignados a las aristas incidentes en los vértices y y z forman un intervalo de enteros, mientras que los colores asignados a las aristas incidentes en el vértice x no forman un intervalo de enteros. Observemos que para que la coloración sea propia, la arista $\{x, z\}$ no puede tener color 1 ni 2, por lo tanto, las aristas de C_3 no se pueden colorear de tal forma que la coloración de todas las aristas incidentes en cada vértice formen un intervalo de enteros.

Una coloración propia por aristas de G se dice consecutiva si para todo vértice $v \in V(G)$, el conjunto de colores de las aristas incidentes al vértice $v \in V(G)$ forman un intervalo de enteros. Si una gráfica G tiene

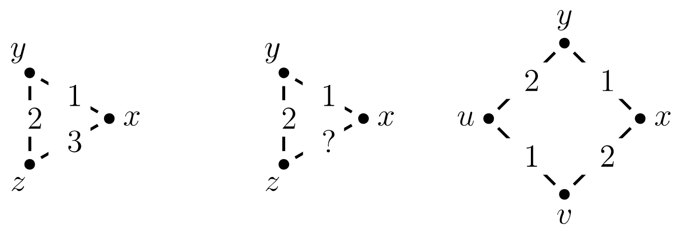

Figura 2. Coloraciones en aristas de las gráficas C_3 y C_4.

una coloración consecutiva decimos que G es consecutivamente coloreable. Así, C_3 es la gráfica más pequeña que no es consecutivamente coloreable. En la figura 2 se muestra que C_4 es una gráfica consecutivamente coloreable.

El ejemplo del ciclo C_3 nos hace preguntarnos ¿podremos determinar cuándo una gráfica es consecutivamente coloreable?

En 1994 Asratian y Kamalian [2] probaron que si una gráfica G con $|V(G)| = n > 2$ es consecutivamente coloreable, el número máximo de colores usados está acotado por $2n - 1$. En [9] Giaro, Kubale y Małafiejski mejoraron esta cota, demostrando que el resultado es válido para $2n - 4$.

Sevastjanov [14] demostró que el problema de determinar si una gráfica bipartita es consecutivamente coloreable es un problema NP-completo.

El primer ejemplo de una gráfica bipartita que no es consecutivamente coloreable fue construido en 1989 por Mirumyan, y dado a conocer en una comunicación personal a Petrosyan, Khachatrian, véase [12] referencia 17.

La gráfica bipartita de Mirumyan tiene 19 vértices y grado máximo 15, en la literatura se le conoce como la roseta de Małafiejski, o el triángulo gordo $\Delta_{5,5,5}$, véase la figura 3.

El primer ejemplo publicado de una gráfica bipartita que no es consecutivamente coloreable fue presentado por Sevastjanov en [14]. La gráfica de Sevastjanov tiene 28 vértices y grado máximo 21, veáse la figura 4.

En 1995 Hertz construyó una gráfica bipartita con 23 vértices y grado máximo 14 que no es consecutivamente coloreable, véase la figura 5. Este ejemplo es generalizado por Giaro et al. [8] y son conocidas como gráficas de Hertz. La gráfica original de Hertz puede expresarse como $H_{7,2}$. En [5] se da una familia infinita de gráficas bipartitas que son una generalización de las gráficas de Hertz y se da una caracterización para cuando estas gráficas generalizadas son consecutivamente coloreables o no.

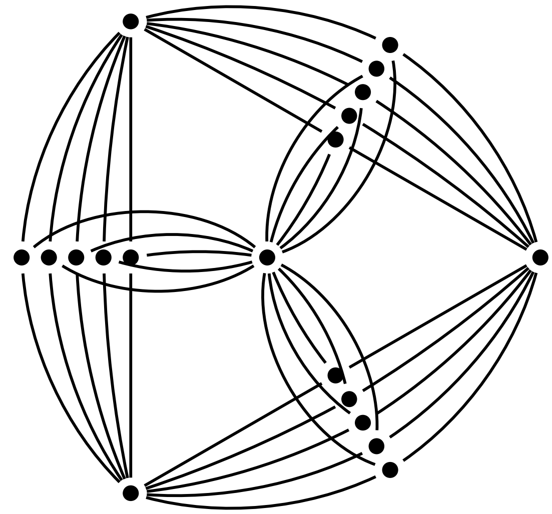

Figura 3. Roseta de Małafiejski $\Delta_{5,5,5}$.

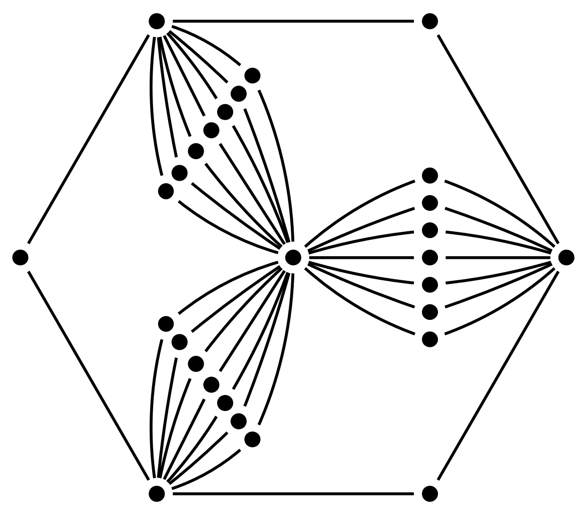

Figura 4. Gráfica de Sevastjanov.

Hasta el día de hoy no se conocen ejemplos de gráficas bipartitas que no sean consecutivamente coloreables con $\Delta(G) \leq 12$. Hansen [10] demostró que no existen ejemplos de gráficas bipartitas con $\Delta(G) \leq 3$ que no sean consecutivamente coloreables.

Junto con las doctoras M. Borowiecka-Olszewska y E. Drgas-Burchardt, de la Universidad de Zielona Gora, Polonia, las autoras de este trabajo, se preguntaron sobre cómo plantear el problema de coloraciones consecutivas para gráficas orientadas, dando lugar a las definiciones y resultados que se presentan en la siguiente sección.

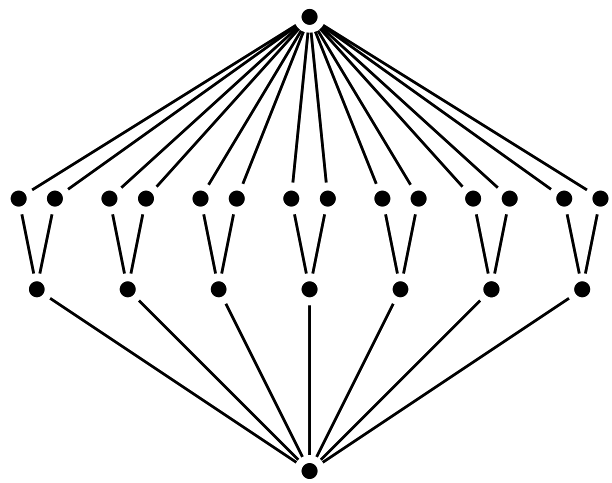

Figura 5. Gráfica de Hertz $H_{7,2}$ con $\Delta(H_{7,2}) = 14$ y $|V(H_{7,2})| = 23$.

5. Coloraciones consecutivas en digráficas

En [6], las autoras dan la siguiente definición: Sea $D = (V, A)$ una digráfica y $c : A(D) \to \mathbb{N}$ una función. Decimos que c es una coloración consecutiva de la digráfica D si se satisfacen las siguientes condiciones:

- la coloración de flechas restringida a la exvencidad $N^+_D(v)$ es propia y consecutiva para todo $v \in V(D)$; y
- la coloración de flechas restringida a la invencidad $N^-_D(v)$ es propia y consecutiva para todo $v \in V(D)$.

Es decir,

(a) para todo vértice $v \in V(D)$ y para todo par de flechas $e_1 = (v, u), e_2 = (v, w)$, $c(e_1) \neq c(e_2)$. Además, el conjunto de colores de las flechas que inician en el vértice $v \in V(G)$, forman un intervalo de enteros; y
(b) para todo vértice $v \in V(D)$ y para todo par de flechas $e_1 = (u, v), e_2 = (w, v)$, $c(e_1) \neq c(e_2)$. Además, el conjunto de colores de las flechas que terminan en el vértice $v \in V(G)$, forman un intervalo de enteros.

Para ilustrar la definición previa consideremos las orientaciones del ciclo C_3. Salvo isomorfismos, solamente hay dos orientaciones de C_3, el ciclo orientado $\overrightarrow{C}_3$ y el torneo transitivo TT_3, la figura 6 nos muestra que ambas orientaciones son consecutivamente coloreables.

Es así como surge la siguiente pregunta:

¿Será cierto que toda digráfica es consecutivamente coloreable?

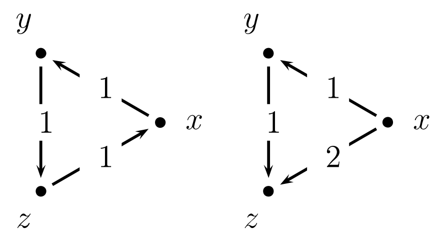

Figura 6. Orientaciones de C_3: $\overrightarrow{C}_3$ y TT_3 con coloraciones consecutivas.

Esta pregunta dio pauta a una nueva área de estudio en las coloraciones consecutivas.

Borowiecka-Olszewska, Drgas-Burchardt, Javier y Zuazua en [6] demuestran que el problema de determinar la existencia de una coloración consecutiva para gráficas orientadas es NP-completo.

A continuación damos ejemplos de familias infinitas de digráficas que son consecutivamente coloreables.

Sea $\mathbb{Z}_n$ el conjunto de los enteros módulo n, y J un subconjunto de $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ tal que si $w \in J$ entonces $-w \notin J$, $\forall w \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, lo cual implica que $|J| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, el conjunto J lo llamaremos el conjunto de saltos. Cuando se cumple la igualdad se habla de torneos circulantes.

Las digráficas circulantes $\overrightarrow{C}_n(J)$ están definidas por los siguientes conjuntos de vértices y flechas:

$$V(\overrightarrow{C}_n(J)) = \mathbb{Z}_n,$$
$$A(\overrightarrow{C}_n(J)) = \{(i,j) : i,j \in \mathbb{Z}_n \text{ y } j - i \in J\}.$$

Las digráficas circulantes que consideramos no tienen flechas simétricas, esto es si $(v,w) \in A(\overrightarrow{C}_n(J))$ entonces $(w,v) \notin A(\overrightarrow{C}_n(J))$. Los siguientes resultados de esta sección son demostrados por Borowiecka-Olszewska *et al.* en [6].

Teorema 5.1. *Toda gráfica orientada $\overrightarrow{C}_n(J)$ es consecutivamente coloreable. Más aún existe una coloración consecutiva de esta gráfica orientada con $|J|$ colores.*

Teorema 5.2. *Sean $k \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{C}_{n_1}(J_1), \ldots, \overrightarrow{C}_{n_k}(J_k)$ digráficas disjuntas, y para toda $1 \leq i \leq k$, sea v_i un vértice de la digráfica $\overrightarrow{C}_{n_i}(J_i)$. Toda digráfica obtenida de la identificación de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en $\overrightarrow{C}_{n_1}(J_1) \cup \cdots \cup \overrightarrow{C}_{n_k}(J_k)$ es consecutivamente coloreable.*

Al colorear las flechas de cualquier orientación de un ciclo con a lo más dos colores se obtiene la siguiente observación.

Observación 5.1. *Toda orientación del ciclo C_n, $n \geq 3$, es consecutivamente coloreable.*

Más aún.

Teorema 5.3. *Toda orientación aciclíca de la gráfica completa K_n es consecutivamente coloreable.*

La siguiente construcción muestra como definimos una gráfica bipartita a partir de una gráfica orientada.

Construcción 5.1. *Sea D una gráfica orientada. Definimos la gráfica $G^*(D)$ asociada a D de la siguiente forma:*

i) *reemplazaremos todo vértice $v \in V(D)$ por dos nuevos vértices v^+, v^-; y*
ii) *ponemos una arista de u^+ a v^- en $G^*(D)$ si y solo si hay una flecha (u,v) en D.*

La figura 7 ilustra la construcción de una gráfica $G^*(D)$.

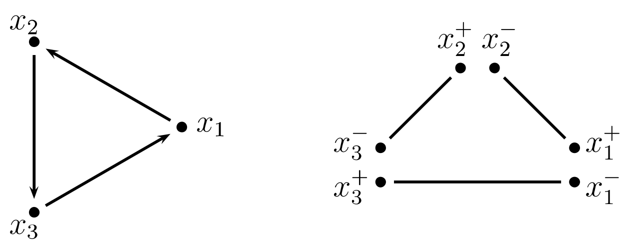

Figura 7. $\overrightarrow{C}_3$ y $G^*(\overrightarrow{C}_3)$.

El siguiente teorema es una caracterización de gráficas orientadas consecutivamente coloreables.

Teorema 5.4. *Sea D una gráfica orientada, D es consecutivamente coloreable si y solo si $G^*(D)$ es consecutivamente coloreable.*

Demostración. Supongamos que D es consecutivamente coloreable y c_1 es una coloración de D. Definimos una coloración consecutiva c_2 de $G^*(D)$ de la siguiente manera $c_2(\{u^+, v^-\}) = c_1((u,v))$. Similarmente, si $G^*(D)$ es consecutivamente coloreable y c_2 es una coloración de G^*, entonces definimos una coloración c_1 de D como $c_1((u,v)) = c_2(\{u^+, v^-\})$. Note que las coloraciones c_1 y c_2 están bien definidas. $\square$

Dada una digráfica D le asociamos una única gráfica G con el mismo conjunto de vértices, pero reemplazando cada flecha por una arista. Esta gráfica se llama la gráfica subyacente de D y la denotamos por $G(D)$.

Recordemos que un vértice v en una digráfica D es una fuente si la invecindad de v es el conjunto vacío. Similarmente, v es un pozo si la exvecindad de v es el conjunto vacío.

Corolario 5.1. *Si D es una gráfica orientada en la que todo vértice es fuente o pozo, entonces D es consecutivamente coloreable si y solo si $G(D)$ es consecutivamente coloreable.*

La importancia del teorema 5.4 y el corolario 5.1, radica en que nos permiten traducir un problema de gráficas orientadas a un problema de gráficas y viceversa, en particular, nos permite hacer uso de la teoría de gráficas consecutivamente coloreables desarrollada previa al trabajo de Borowiecka-Olszewska et al [6].

Por otro lado, el siguente análisis nos muestra que los problemas no son equivalentes.

- El ciclo C_3 no es consecutivamente coloreable, sin embargo todas las orientaciones de C_3 si lo son, véase la figura 6.
- Sabemos que la roseta de Małafiejski, $\Delta_{5,5,5}$ (figura 3) no es consecutivamente coloreable. Sin embargo en la figura 8 damos una orientación D_1 de $\Delta_{5,5,5}$ que si es continuamente coloreable. Lo que nos demuestra que las condiciones de que todo vértice sea fuente o pozo son necesarias en el corolario 5.1.

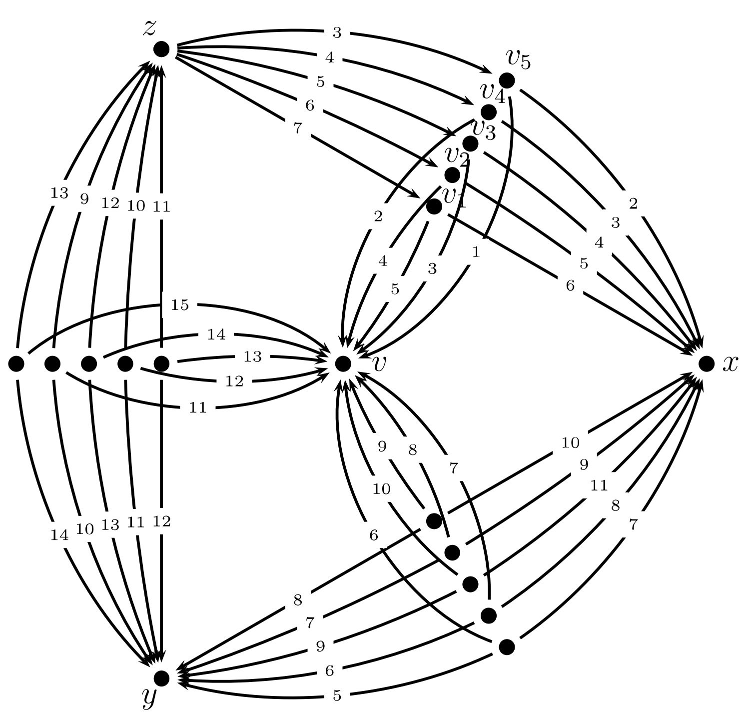

Figura 8. D_1 es una orientación consecutivamente coloreable de $\Delta_{5,5,5}$.

- Si en la gráfica orientada D_1 cambiamos la orientación de las flechas $(z, v_1), (z, v_2), (z, v_3), (z, v_4), (z, v_5)$, en la nueva gráfica orientada D_2 todos los vértices son pozos o fuentes y por el corolario 5.1, no es consecutivamente coloreable.

Con lo que hasta ahora tenemos ejemplos de gráficas que no son consecutivamente coloreables tal que todas su orientaciones son consecutivamente coloreables (C_3) y ejemplos de gráficas que no son consecutivamente coloreables pero para las que podemos exhibir ejemplos de orientaciones consecutivamente coloreables y no consecutivamente coloreables ($\Delta_{5,5,5}, D_1, D_2$).

En este momento nos preguntamos si es posible encontrar una familia infinita de gráficas que sean consecutivamente coloreables pero que no sean consecutivamente coloreables para alguna de sus orientaciones. Sorprendentemente, la respuesta es si. Mostraremos un ejemplo particular que puede generalizarse a una infinidad, hemos llamado a esta gráfica, la gráfica corazón G_c.

Por la teoría desarrollada en [5], se sabe que G_c la gráfica subyacente de la gráfica orientada D_c de la figura 9 es consecutivamente coloreable.

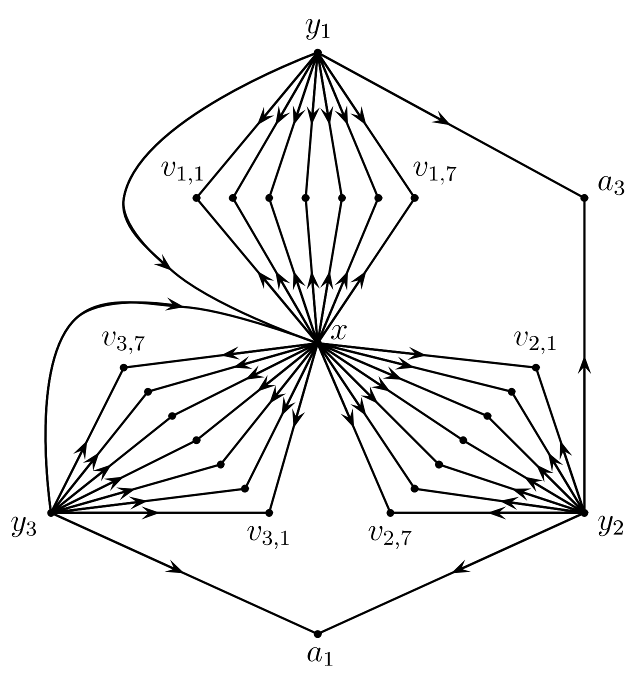

Figura 9. Gráfica orientada D_c la cual no es consecutivamente coloreable.

Sin embargo, es un ejercicio sencillo, observar que al calcular la gráfica bipartita $G^*(G_d)$, aparece como componente conexa una copia de la gráfica de Sevastjanov, por lo que aplicando el teorema

5.4, afirmamos que la gráfica orientada D_c no es consecutivamente coloreable.

Las observaciones anteriores dan lugar a nuestra conjetura final.

Conjetura 1 ([6]). *Para toda gráfica G existe D una orientación de G tal que D es consecutivamente coloreable.*

Agradecimientos: este trabajo ha sido desarrollado con el apoyo del proyecto PAPIIT-UNAM IN117219. La primer autora agradece el apoyo recibido por el Programa de Becas Posdoctorales, DGAPA-UNAM. Ambas autoras agradecen a los árbitros anónimos por sus comentarios y sugerencias.

Bibliografía

[1] A. S. Asratian y R. R. Kamalian, «Interval colorings of edges of a multigraph», *Appl. Math.*, vol. 5, 1987, 25–34, en ruso.

[2] ______, «Investigation on interval edge-colorings of graphs», *J. Combin. Theory*, vol. 62, 1994, 34–43, https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1053.

[3] J. Bang-Jensen y G. Gutin, *Digraphs. Theory, algorithms and applications*, 2.ª ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, Ltd. London, 2009, xxii+795 pp.

[4] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph theory*, 1.ª ed., Graduate Texts in Mathematics 244, Springer-Verlag London, Ltd. London, 2008, xii+663 pp.

[5] M. Borowiecka-Olszewska y E. Drgas-Burchardt, «The deficiency of all generalized Hertz graphs and minimal consecutively non-colourable graphs in this class», *Discrete Math.*, vol. 339, 2016, 1892–1908, https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.12.028.

[6] M. Borowiecka-Olszewska, E. Drgas-Burchardt, N. Javier-Nol y R. Zuazua-Vega, «Consecutive colouring of oriented graph», 2020, enviado a Results in Mathematics (RIMA).

[7] R. Diestel, *Graph theory*, 2.ª ed., Graduate Texts in Mathematics 173, Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] K. Giaro, M. Kubale y M. Małafiejski, «On the deficiency of bipartite graphs», *Discrete Appl. Math.*, vol. 94, 1999, 193–203, https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1053.

[9] ______, «Consecutive colorings of the edges of general graphs», *Discrete Mathematics*, vol. 236, 2001, 131–143, https://doi.org/10.1016/S0012-365X(00)00437-4.

[10] H. Hansen, «Scheduling with minimum waiting periods», 1992, Masters Thesis.

[11] I. Holyer, «The *np*-completeness of edge-coloring», *SIAM J. Comput.*, vol. 10, núm. 4, 1981, 718–720, https://doi.org/10.1137/0210055.

[12] P. A. Petrosyan y H. H. Khachatrian, «Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs», *J. Graph Theory*, vol. 76, 2014, 200–216, https://doi.org/10.1002/jgt.21759.

[13] D. P. Sanders y Y. Zhao, «Planar graphs of maximum degree seven are class 1», *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 83, núm. 2, 2001, 202–212, https://doi.org/10.1006/jctb.2001.2047.

[14] S. V. Sevastjanov, «Interval colorability of the edges of a bipartite graphs», *Metody Diskret. Analiza*, vol. 50, 1990, 61–72, en ruso.

[15] V. G. Vizing, «Critical graphs with given chromatic index», *Metody Diskret. Analiz*, vol. 5, 1965, 9–17, en ruso.

[16] L. M. Zhang, «Every planar graph with maximum degree 7 is of class 1», *Graphs and Combinatorics*, vol. 16, núm. 4, 2000, 467–495.