Resolviendo sistemas de ecuaciones no lineales

Olivia Gutú
Universidad de Sonora
oliviagutu@mat.uson.mx

Resumen

Este artículo ofrece un panorama sobre el análisis de las soluciones de un sistema de ecuaciones $f(x) = y$ no lineal. A manera de introducción se presentan las ideas seminales de Hadamard sobre las condiciones que debe de cumplir una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a fin de que el sistema tenga única solución para todo y. A continuación se reflexiona sobre estas condiciones bajo el supuesto que f sea una función entre espacios vectoriales de dimensión infinita. En la última sección se analiza el caso «más incógnitas que ecuaciones». Se concluye con un resultado reciente para obtener secciones continuas globales de f en este contexto.

1. Las ideas de Hadamard

Desde los primeros años de carrera, el estudiante de ciencias se enfrenta a la solución de sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$; donde A es una matriz. La pregunta de cuándo un sistema lineal tiene única solución tiene respuestas por todos conocidas y cuyo estudio moderno se puede decir que tiene sus orígenes con Leibniz en el siglo XVII con su definición de determinante. Cuando se trata de ecuaciones no lineales de la forma:

$$f(x) = y \tag{1}$$

Palabras clave: Inversión global, secciones globales, fibrados.

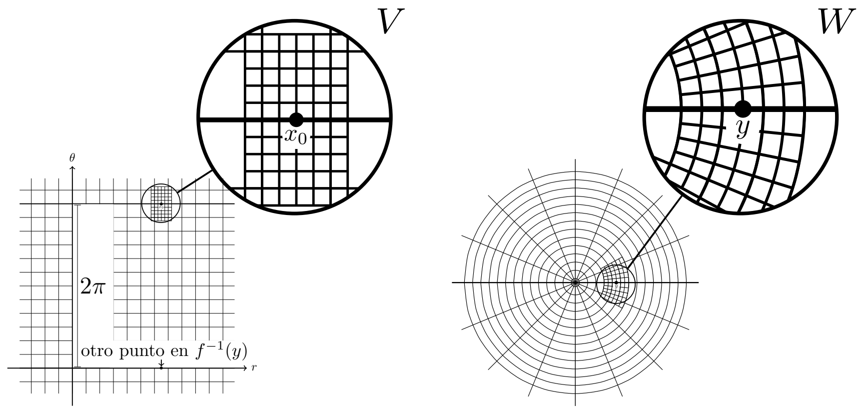

Figura 1. Vecindades V y W homeomorfas bajo f.

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ no es lineal, posiblemente el lector piense en el teorema de la función inversa, que en su enunciación clásica y bien extendida nos dice lo siguiente:[1]

Teorema 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable. Si $\det \mathrm{J}f(x_0) \neq 0$ para un punto x_0 en $\mathbb{R}^n$ entonces existen vecindades V de x_0 y W de $f(x_0)$ tales que $f|_V : V \to W$ tiene inversa continuamente diferenciable en W.*

Por ejemplo, consideremos el sistema (1) para $n = 2$ y f dada por $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. La función f envía a las líneas verticales a círculos centrados en el origen y a las líneas horizontales a rayos que pasan por el origen. El determinante de la matriz jacobiana de f en un punto (r, θ) es r. Entonces, para un punto cualquiera $x_0 = (r, \theta)$ tal que $r \neq 0$, digamos $(1, 2\pi)$ existen vecindades V de x_0 y W de $f(x_0) = (1, 0)$ tales que $f|_V : V \to W$ es un homeomorfismo con inversa diferenciable. La figura 1 muestra tales posibles vecindades. Esto no quiere decir que dado $y = (1, 0)$ exista una única solución para este sistema. Por supuesto, la ecuación (1) tiene única solución para todo y si y solo si f es uno a uno y sobre, y nuestra función ejemplo está lejos de ser inyectiva.

A principios del siglo pasado, Hadamard en su artículo seminal [9] propuso una condición de existencia y unicidad para la ecuación (1) en

[1]Para muchos el teorema de la función inversa es uno de los teoremas más importantes en matemáticas, cuyo comienzo se remonta a las ideas seminales de Newton, Leibniz y Lagrange hasta las formulaciones rigurosas de Cauchy y el matemático italiano Ulisse Dini entre los siglos XVII y XIX. El lector puede consultar el libro de Krantz y Parks [12] donde se explican a detalle estas aportaciones en un lenguaje actual y con muchos ejemplos.

términos del número real:

$$\mu_x = \min_{\|v\|=1} \|\mathrm{J}f(x)v\|. \tag{2}$$

El símbolo $\|\cdot\|$ en (2) se refiere a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Si $n=1$, Hadamard nos recuerda que si la primera derivada es positiva en todo $x \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación (1) tiene a lo más una solución. Sin embargo, la existencia no se puede garantizar a no ser que $\int_{-\infty}^{0} f'(\rho)d\rho = \infty$ y $\int_0^\infty f'(\rho)d\rho = \infty$; de ser el caso, de ambos lados del cero, la gráfica de la función f «se expande» al infinito, de tal forma que interseca cualquier línea horizontal del plano; de otro modo, se podría tener lo que se presenta en la figura 2. Para $n > 1$, Hadamard afirma que no es suficiente reemplazar $f'(\rho)$ en las integrales de arriba por el determinante de la matriz jacobiana en x, sino que el criterio adecuado es:

(I) $\int_0^\infty \min_{\|x\|=\rho} \mu_x \, d\rho = \infty$,

siempre que $\mu_x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En otras palabras, el bellísimo resultado de Hadamard es el siguiente:

Teorema 1.2 (Hadamard, 1906)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable tal que* $\min_{\|v\|=1} \|\mathrm{J}f(x)v\| > 0$*, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si*

$$\int_0^\infty \min_{\|x\|=\rho} \min_{\|v\|=1} \|\mathrm{J}f(x)v\| \, d\rho = \infty$$

entonces el sistema $f(x) = y$ tiene una única solución para todo y.

Un cálculo sencillo nos revela que, para cualquier matriz cuadrada A, A es una matriz invertible si y solo si $\min_{\|v\|=1} \|Av\| > 0$. En particular, $\mu_x > 0$ si y solo si $\mathrm{J}f(x)$ es una matriz invertible y por el teorema de la función inversa, f es localmente invertible y además:[2]

$$\mu_x = \|\mathrm{J}f(x)^{-1}\|^{-1}.$$

En vista de lo anterior, la condición (I) se cumple si $\mathrm{J}f(x)$ es invertible para todo x y además existe $M > 0$ tal que:

(II) $\|\mathrm{J}f(x)^{-1}\| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

pues en este caso, para todo $\rho > 0$ se tiene que $0 < M^{-1} \leq \min_{\|x\|=\rho} \mu_x$. El corolario resultante se conoce en la literatura como teorema de Hadamard-Levy y posiblemente sea uno de los resultados de inversión global más populares en la literatura.

[2]Una referencia del porqué $\mu_x = \|\mathrm{J}f(x)^{-1}\|^{-1}$ es [16, p. 73], sin embargo se invita al lector a hacer la prueba él mismo. Esta forma de escribir a μ_x es la que se encuentra usualmente en libros de texto. Nosotros nos quedamos con la original, entre otras razones que daremos más adelante, porque la condición en términos de $\mu_x = \|\mathrm{J}f(x)^{-1}\|^{-1}$ implica conocer la inversa de la matriz jacobiana de f en todo punto x.

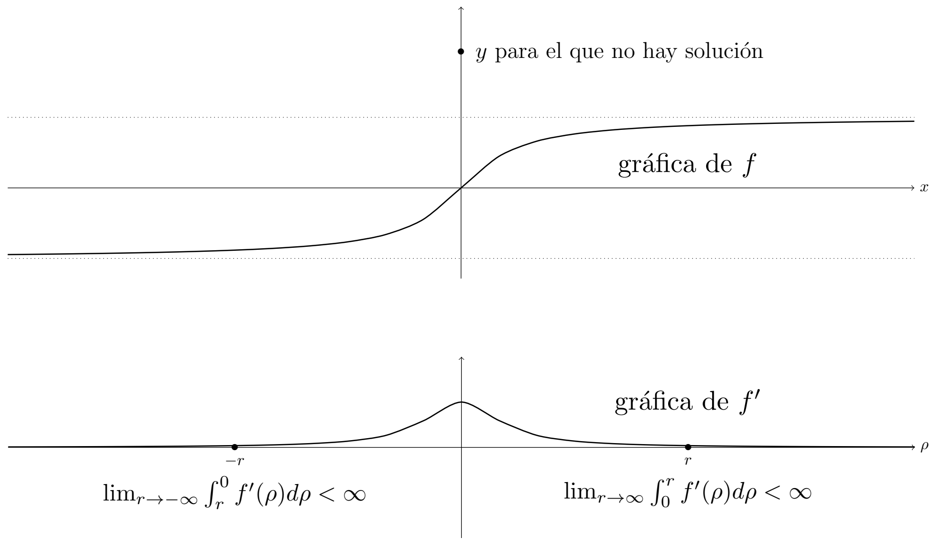

Figura 2. Ejemplo de una función f con derivada positiva en todo punto pero que no es sobre; para esta f se tiene que $\int_{-\infty}^0 f'(\rho)d\rho < \infty$ y $\int_0^\infty f'(\rho)d\rho < \infty$.

Pero además del teorema 1.2, en su artículo de 1906, Hadamard hace las siguientes observaciones informales las cuales se fueron precisando y redondeando paralelamente en geometría, topología y análisis, hasta formar una teoría completa que es justamente de la que se hablará en las siguientes secciones.

Observación 1. Bajo las hipótesis del teorema 1.2, la condición (I) debería implicar que:

(III) Todo camino q definido en $[0, \varepsilon)$ que comienza en 0 y es enviado bajo la función f a un segmento $p(t) = f(0) + tw$, tiene longitud finita.

Observación 2. Si f es localmente invertible (homeomorfismo local) en todo punto entonces la condición (III) debe ser suficiente para asegurar la existencia y unicidad de (1), incluso si f no es diferenciable.

Las ideas detrás de la observación 2 se ilustran en la figura 1. Al espacio de llegada lo vemos como un conjunto de rayos que salen de $f(0)$. Dado un rayo cualquiera $p(t) = f(0) + tw$ definido en $[0, 1]$, ya que f es un homeomorfismo local, existe un único camino $q(t) = q(t, w)$ definido en un intervalo maximal $[0, \epsilon)$ tal que $f \circ q = p$ en $[0, \epsilon)$ que comienza en 0 (a q se le llama *levantamiento* de p). [3] Supongamos que $\epsilon < 1$. La condición (III) nos asegura que la longitud de q es finita.

[3] El levantamiento q es una función continua si f es un homeomorfismo local. Además, si $\mathrm{J}f(x)$ es invertible para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y f es continuamente diferenciable, por el teorema de la función inversa, q es continuamente diferenciable.

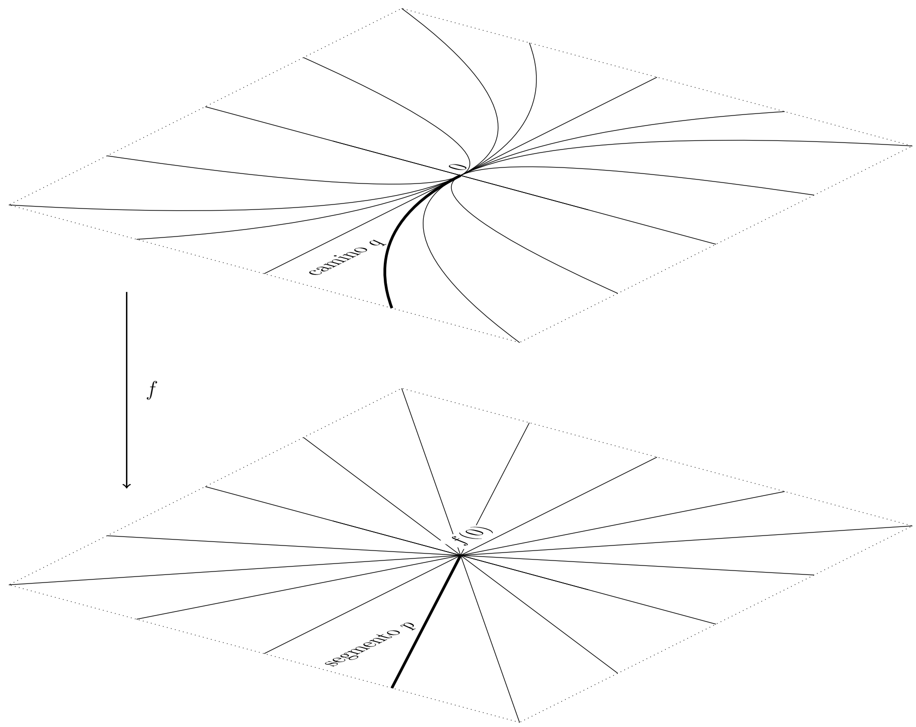

Figura 3. Ilustración de las ideas detrás de la observación 2.

Entonces, podemos considerar que f es un homeomorfismo local en un punto «cerca del final» de la imagen de q, y prolongar la existencia de q más allá de ϵ, lo que contradice la maximalidad del intervalo $[0,\epsilon)$. No hay ambiguedad en tal extensión, pues, ya que f es un homeomorfismo local: *si q_1 y q_2 son dos levantamientos de un mismo segmento que coinciden en un punto, entonces $q_1 \equiv q_2$*. Por tanto, si la longitud del levantamiento q es finita entonces está definido en todo $[0,1]$ y podemos para todo $w \in Y$ considerar la función $w \mapsto q(1,w)$. El fondo del asunto es el siguiente (daremos más adelante la referencia): si w y w^* son puntos cercanos en Y entonces $q(1,w)$ y $q(1,w^*)$ son puntos cercanos en X. Esto implica que la función $w \mapsto q(1,w)$ es continua en Y y el conjunto $S = \{q(1,w) : w \in Y\} \neq \emptyset$ es abierto en X. Además, la continuidad de $w \mapsto q(1,w)$ implica que S es cerrado en X. Por tanto $X = S$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, consideramos el segmento $p(t) = f(0) + tw$ con $w = y - f(0)$ que une a $f(0)$ con y. Entonces $x = q(1,w)$ es la única solución del sistema $f(x) = y$.

Con respecto a la observación 1, es fácil ver que (ii) —caso particular de (i)— implica (iii). Si $q : [0,\epsilon) \to \mathbb{R}^n$ es un levantamiento de un segmento $p(t) = f(0) + tw$, entonces, ya que $\mathrm{J}f(q(t))\dot{q}(t) = \dot{p}(t) = w$, para todo $s \in [0, \epsilon]$:

$$\ell(q|_{[0,s]}) = \int_0^s \|\dot{q}(t)\| dt = \int_0^s \|\mathrm{J}f(q(t))^{-1}w\| dt \leq M\|w\|. \tag{3}$$

Por tanto, $\ell(q) = \lim_{s\to\epsilon} \ell(q|_{[0,s]}) < M\|w\| < \infty$. La prueba del caso general «(I) implica (III)» queda fuera del alcance de este artículo, pero una demostración muy bonita se puede ver en [17], donde se cambia la métrica de $\mathbb{R}^n$, de modo que si consideramos la longitud de q respecto a esa métrica, se puede razonar análogamente como en (3), pero tomando en cuenta la condición integral (I) en lugar de (II).

Finalmente, Hadamard también hace la siguiente reflexión que nos servirá para introducir nuevos conceptos y argumentos que usaremos más adelante:

Observación 3. Si f es continuamente diferenciable, la condición (III) se cumple si para todo $\varrho > 0$ existe ρ tal que $\|f(x)\| > \varrho$ si $\|x\| > \rho$, esto es, siempre que:

(IV) $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$.

Cuando una función f satisface la condición (IV) se dice que es *coerciva* (o *coercitiva*). Note que una función f es coerciva si y solo si para todo conjunto acotado B de $\mathbb{R}^n$ su preimagen

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$$

es un conjunto acotado también. Cualquier segmento $p(t) = f(0) + tw$ de la figura 1 vive dentro de un conjunto acotado B. Por tanto, si f es coerciva entonces la imagen del levantamiento q que comienza en 0 está en el conjunto acotado $f^{-1}(B)$ y, de hecho, dentro de un conjunto compacto K. Ya que f es continuamente diferenciable, el levantamiento q tiene que ser de longitud finita, pues tomando en cuenta (3), basta verificar que para todo $s \in [0, \epsilon)$:

$$\sup_{t\in[0,s)} \|\mathrm{J}f(q(t))^{-1}w\| < \max_{x\in K} \|\mathrm{J}f(x)^{-1}\| \|w\|. \tag{4}$$

Para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la condición de coercividad es equivalente a ser f una aplicación propia [2]. En general, una función f entre espacios topológicos se dice que es *propia* si:

(V) $f^{-1}(K)$ es compacto siempre que K sea compacto.

Es por eso que en algunos textos se le atribuye a Hadamard el siguiente teorema. Ver por ejemplo [12, p. 127]:

Teorema 1.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continuamente diferenciable, si f es una aplicación propia —equivalentemente coerciva—*

tal que $\mathrm{J}f(x)$ *es invertible para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *entonces* f *es biyectiva con inversa continuamente diferenciable.*

Las reflexiones originales de Hadamard han servido para introducir los conceptos y argumentaciones fundamentales del tema. En las siguientes secciones se da un vistazo panorámico de resultados de inversión global donde la condición (III) juega un papel fundamental. En primera instancia se retoman las ideas de Hadamard, bajo el supuesto que la función $f : X \to Y$ es una aplicación suficientemente suave entre espacios de Banach —espacios vectoriales normados y completos— . En primer lugar se analiza el caso donde la derivada $df(x)$ es un isomorfismo para todo $x \in X$ y se resumen criterios para asegurar que f es biyectiva con inversa diferenciable. En la última sección se relajan la hipótesis y se supone simplemente que $df(x)$ es sobre para todo $x \in X$, pero no necesariamente inyectiva. En este caso, criterios similares garantizan la existencia de secciones globales de f, esto es, funciones continuas $\sigma : Y \to X$ tales que $f(\sigma(w)) = w$ para todo $w \in Y$. Es importante señalar que las ideas expuestas hasta ahora pueden transladarse sin problema de dimensión finita a dimensión infinita, de ahí el éxito de esta técnica dentro del análisis no lineal. Se hará hincapié en los puntos donde la cuestión de la dimensión sea relevante. Para dar al lector un panorama más general, se establecen algunas conexiones de lo anterior con resultados relevantes de geometría diferencial y topología como el teorema de Cartan-Hadamard, el teorema de Ehressman y el teorema de Browder.

2. Teoremas globales de la función inversa

Ecuaciones de la forma (1) para funciones $f : X \to Y$ entre espacios de dimensión infinita aparecen todo el tiempo en diferentes ámbitos, generalmente en forma de ecuaciones en derivadas parciales o ecuaciones integro diferenciales no lineales; para consultar ejemplos muy concretos e ilustrativos ver [1] y [10]. El artículo de P. Levy [15] de 1920 es considerado por muchos como el pionero en el salto a la dimensión infinita. Levy probó, para $X = Y$ el espacio de funciones cuadrado integrables[4], que *si* f *es una función continuamente diferenciable tal que* $df(x)$ *es un isomorfismo para todo* $x \in X$ *y satisface* (III) *entonces el sistema* (1) *tiene una única solución para todo* y.[5] Sean X y Y espacios de Banach cualesquiera, no necesariamente iguales. Podemos argumentar el resultado de Levy para una función $f : X \to Y$ copiando *verbatim* las ideas

[4] Sobre cualquier espacio, respecto a cualquier medida.

[5] El teorema de la función inversa se cumple también para funciones continuamente diferenciables (derivada Fréchet) entre espacios de Banach. El lector puede consultar el capítulo 4 del libro de cálculo diferencial de H. Cartan [6].

sobre la observación 2 que se dieron justamente después de la figura 1 para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si además f es suficientemente suave (con derivada localmente Lipschitz), los levantamientos de los segmentos $p(t) = f(0) + tw$ se pueden ver como soluciones de la ecuación de Wazewski:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= df(q(t))^{-1}w, \\ q(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Fijando $w \in Y$ existe una única solución $q(t, w) = q(t)$ que comienza en el origen definida en un intervalo maximal que contiene al cero, en particular está definida en un intervalo de la forma $[0, \epsilon)$. Este punto de vista nos servirá para hacer la conexión del teorema de Levy con otros resultados más sofisticados que se exponen más adelante. Pero además en este caso, podemos concluir más cosas: *la inversa de f es también continuamente diferenciable*; pues coincide localmente con las inversas locales $(f|_{V_x})^{-1}$ que existen en cada punto $y = f(x)$.[6]

Por otro lado, el criterio (II), sustituyendo la matriz jacobiana por la derivada Fréchet, implica claramente la condición (III) siguiendo básicamente un argumento análogo a (3) para el caso finito-dimensional.

Teorema 2.1 (Hadamard-Levy, 1920, John-Plastock, 1968 y 1974)**.** *Sea $f : X \to Y$ una función continuamente diferenciable entre espacios de Banach tal que $df(x)$ es un isomorfismo para todo $x \in X$. Si existe un $\alpha > 0$ tal que*

$$\inf_{\|v\|=1} \|df(x)v\| \geq \alpha, \ \textit{para todo } x \in X$$

entonces f es biyectiva con inversa continuamente diferenciable.

Por otro lado, la condición (V) también implica el criterio (III). De hecho, si f es una función propia entonces cada segmento p en Y está contenido en un compacto K y por tanto la imagen de su correspondiente levantamiento q está en $f^{-1}(K)$ que también es un compacto. Basta entonces considerar la versión infinito dimensional de (3) y (4). Estas limitaciones sobre la diferenciabilidad de f pueden de hecho ser eliminadas, así lo confirma el siguiente teorema de los años treinta que de forma independiente probaron los polacos Banach y Mazur [3] y el italiano Caccioppoli [5]:

Teorema 2.2 (Banach-Mazur-Caccioppoli, 1932 y 1934)**.** *Un homeomorfismo local entre espacios de Banach es una aplicación propia si y solo si es un homeomorfismo global.*

[6] La existencia y unicidad de la ecuación (5) se debe que a que f tiene derivada localmente Lipschitz, sin embargo esto no es necesario para ver que f^{-1} es continuamente diferenciable si f lo es. Para ver los detalles, el lector puede consultar el artículo de F. John [11].

En algunos textos, el teorema 2.2 se le atribuye a Browder porque a medidados de los cincuenta, Browder probó [4], en un contexto muy general de funciones entre espacios topológicos con ciertas propiedades de conexidad, que: si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo local y una función propia entonces f es una *proyección recubridora*. Una función f es una proyección recubridora si todo punto en Y tiene un entorno W cuya preimagen es la unión disjunta de abiertos cada una de ellos homeomorfo a W bajo f. En este caso, para todo $y \in Y$, el conjunto de soluciones $f^{-1}(y)$ de (1) es homeomorfo a un conjunto discreto $\mathcal{F}$ y de hecho $f^{-1}(W)$ es homeomorfo a $W \times \mathcal{F}$. Ver figura 4. Si f es una aplicación propia, el conjunto $\mathcal{F}$ es finito. Más aún, de la teoría de homotopía se sabe que si además Y es simplemente conexo y X es arco-conexo, entonces la proyección recubridora f es un homeomorfismo [20]. La demostración se basa fundamentalmente en la llamada «propiedad de levantamiento de caminos». No ahondaremos más en el tema, pero basta decir que bajo las hipótesis del teorema 2.2, esta propiedad es equivalente a «levantar» segmentos de línea recta, que es básicamente lo que se hizo en el bosquejo de la demostración del resultado de Levy. Mientras que en caso de funciones entre variedades riemannianas, esta propiedad equivale a «levantar» geodésicas minimizantes.

Por otro lado, un dato curioso es que existe un homeomorfismo $f : X \to X$ que envía a $X \setminus B$ a B donde B es una bola abierta en un espacio de Banach X de dimensión infinita. Por supuesto, este homeomorfismo no es una función coerciva [21]. Esto echa abajo la idea intuitiva de que un homeomorfismo global entre espacios vectoriales debe ser coercivo. En otras palabras, en dimensión infinita no se puede sustituir libremente «propia» por «coerciva» en el teorema 2.2. Sin embargo puede que se valga en algunos casos particulares o añadiendo supuestos extras. Un ejemplo trivial de función coerciva es una isometría global, esto es:

$$\|f(x) - f(u)\| = \|x - u\| \text{ para todo } x, u \in X.$$

Una isometría global $f : X \to Y$ es obviamente uno a uno y una pregunta muy pertinente es bajo qué condiciones es también sobre. Recuerde que, por el teorema de Mazur-Ulam, si f es una isometría global sobre entonces f es de hecho una transformación afín. Es bien sabido que toda isometría global $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es biyectiva, esto es consecuencia del teorema de la invariancia de Brouwer, el cual falla en dimensión infinita en general [13]. Sin embargo, se tiene un resultado similar en dimensión infinita pidiendo lo que en el caso finito dimensional lo da el teorema de invariancia. Siendo más precisos, si $f : X \to Y$ es una función continua tal que $f(X)$ es abierto en Y y:

(VI) $\|f(x) - f(u)\| \geq \alpha\|x - u\|$, para todo $x, u \in X$ y algún $\alpha > 0$,

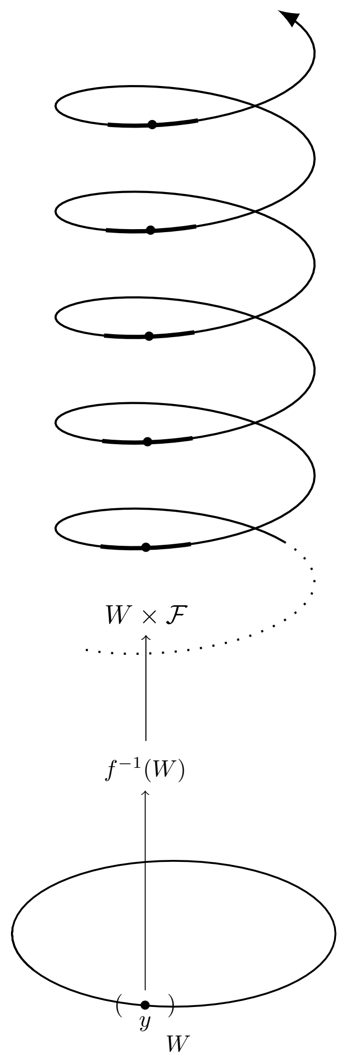

Figura 4. Ejemplo típico de proyección recubridora. El conjunto $\mathcal{F}$ es un conjunto discreto. Para todo y el conjunto $f^{-1}(y)$ de soluciones de la ecuación (1) (los puntitos dentro del espiral) es homeomorfo a $\mathcal{F}$.

entonces f es un homeomorfismo sobre Y [19]. En este punto regresamos al teorema de Hadamard-Levy, pues resulta que si f es una función continuamente diferenciable tal que $df(x)$ es un isomorfismo, entonces:[7]

$$\mu_x := \lim_{u\to x} \frac{\|f(u)-f(x)\|}{\|u-x\|} = \inf_{\|v\|=1} \|df(x)v\| = \|df(x)^{-1}\|^{-1}.$$

Por tanto, la condición (VI) implica (II). A finales de los sesenta se probó la versión definitiva del teorema 1.2 para funciones entre espacios de Banach en términos del criterio:

(I') $\int_0^\infty \inf_{\|x\|\le\rho} \mu_x \, d\rho = \infty$.

Esto se puede ver como consecuencia del siguiente hecho notable [11]: sea $f : X \to Y$ una función continuamente diferenciable tal que $df(x)$ es un isomorfismo para todo $x \in X$. Supongamos por comodidad que $f(0) = 0$. Para $r > 0$ sea

$$\varrho(r) = \int_0^r \inf_{\|x\|\le\rho} \mu_x \, d\rho.$$

Para $w \in Y$ con $\|w\| < \varrho(r)$, el levantamiento local $q(t) = q(t, w)$ de $p(t) = tw$ se puede extender hasta ser definido para $t = 1$. Además $\|q(t)\| < r$ para todo $t \in [0, 1]$. En particular:

$$B_{\varrho(r)} \subset f(B_r).$$

Y finalmente si $\varrho(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$ entonces la función f tiene inversa diferenciable definida en todo Y. En particular, la ecuación (1) tiene única solución para todo y.

Las ideas del bosquejo de la prueba del teorema de Levy es una adaptación para nuestro caso (más simple) tomada del trabajo de John [11]. Poco después, a principios de los setenta, de forma independiente Plastock [17] ofrece otra demostración basada en la teoría de espacios recubridores de la geometría diferencial, que el lector puede comparar por ejemplo con la prueba del teorema de Cartan-Hadamard de la geometría diferencial, que a su vez tiene un punto importante en común con la demostración muy general de Browder: todas se basan en extender «levantamientos» de segmentos, geodésicas o, en general, caminos continuos. Esta técnica ha sido muy eficiente, pues permite el traslado a la dimensión infinita sin apenas hacer modificaciones de fondo. Sin embargo, a principio de los años noventa surgieron nuevos métodos basados en el principio variacional de Ekeland (teoría de puntos críticos) donde se obtuvieron criterios más finos para concluir la existencia y unicidad de las soluciones de (1) que aparentemente se le escapan a la técnica de continuación de caminos y que valen para funciones entre espacios de dimensión infinita.

[7]Esto se cumple también en contextos más generales, por ejemplo, si X y Y son variedades riemannianas completas, se tiene que si f es un difeomorfismo local entonces $\lim_{u\to x} \frac{d_Y(f(u),f(x))}{d_X(u,x)} = \inf_{\|v\|_{T_xX}=1} \|df(x)v\|_{T_{f(x)}Y}$ donde d_X y d_Y representan a la distancia riemanniana en X y Y, respectivamente, ver [8] y referencias ahí.

3. Más incógnitas que ecuaciones

A finales de los años noventa Rabier [18] publicó un resultado que generalizaba al mismo tiempo el teorema de Hadamard —incluso la versión infinito-dimensional que acabamos de presentar— y el famoso teorema de Ehressmann de geometría diferencial:

Teorema 3.1 (Ehressmann, 1950). *Sean X y Y variedades diferenciables de clase C^∞, X de dimensión n y Y de dimensión m con $n \geq m$. Si $f : X \to Y$ es una función C^∞, sobre y propia, tal que $df(x)$ es sobre para todo $x \in X$, entonces es un fibrado.*

Vayamos poco a poco. Supongamos que $X = \mathbb{R}^n$ y $Y = \mathbb{R}^m$. ¿Qué significa que $df(x)$ sea sobre, para todo $x \in X$? Un ejemplo sencillo es cuando f es una función lineal, digamos una matriz $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n \geq m$ y el rango de A es m. Recuerde que en este caso $df(x) = A$ para todo x. En este caso, el álgebra lineal nos dice que existe una matriz invertible Φ tal que $A\Phi = \pi$ donde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la proyección sobre el primer factor. Para el caso no lineal, si $df(x)$ es sobre, entonces $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ es prácticamente una proyección sobre el primer factor cerca de x. [8] Una pregunta natural es bajo qué condiciones, si $df(x)$ es sobre para todo x, f se comporta «globalmente» como una proyección.

Ahora bien, el teorema de Banach-Mazur-Caccioppoli es un caso particular del teorema de Browder: todo homeomorfismo local $f : X \to Y$ que sea una aplicación propia es una proyección recubridora. En particular el conjunto de soluciones $f^{-1}(y)$ de (1) es, para todo $y \in Y$ homeomorfo a un mismo conjunto discreto $\mathcal{F} \subset X$. Si resulta que Y es simplemente conexo, entonces $f^{-1}(y)$ es un solo punto y f es en realidad un homeomorfismo. El concepto de proyección recubridora es un caso particular de *fibrado*. Se dice que una función f es un fibrado si es sobre y si existe una cubierta $\{W\}$ de Y y un espacio topológico $\mathcal{F}$ tal que $\Phi_W : W \times \mathcal{F} \to f^{-1}(W)$ es un homeomorfismo para cada W y además $f \circ \Phi_W$ es la proyección natural. Ver figura 5. En particular, el conjunto $f^{-1}(y)$ de soluciones de (1) es homeomorfa a $\mathcal{F}$. Finalmente si Y es contraible entonces f es un *fibrado trivial*: esto es, existe un homeomorfismo $\Phi : Y \times \mathcal{F} \to X$ tal que $f \circ \Phi$ es la proyección sobre el primer factor.

[8] Si $df(x)$ es sobre, entonces para todo x existen un abierto V de x, un homeomorfismo $\Phi : W \times U \to V$, un W abierto en $\mathbb{R}^m$ y un U abierto en $\mathbb{R}^{n-m}$ tales que $f \circ \Phi = \pi$, donde $\pi : W \times U \to W$ es la proyección natural. Esto se puede extender naturalmente para funciones entre espacios de Banach, siempre que el núcleo de $df(x)$ escinda para todo x, esto es, que exista un subespacio G_x de X tal que $X = \ker df(x) \oplus G_x$; y también se puede extender al contexto de funciones entre variedades, pasando por la clásica composición de cartas. Ver el primer capítulo del libro de S. Lang [14].

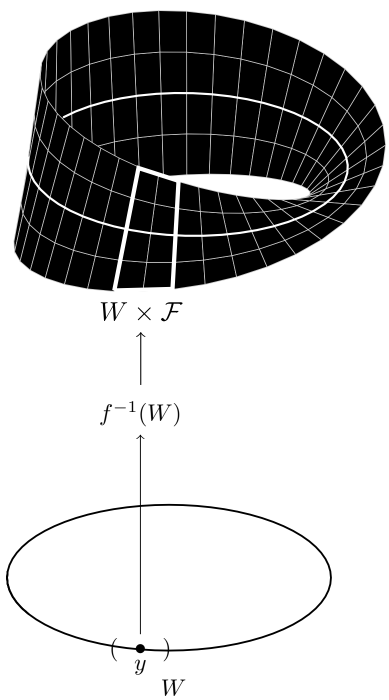

Figura 5. Ejemplo de fibrado. Comparar con la figura 4.

El teorema de Ehressman es para muchos un resultado fundamental en geometría diferencial, sin embargo, pierde interés en casos importantes, sobre todo si hablamos de funciones entre espacios vectoriales. Por ejemplo, si consideramos la proyección trivial $\pi(x_1, x_2) = x_1$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, entonces el conjunto de soluciones $\pi^{-1}(y)$ es $\{(y, x) : x \in \mathbb{R}\}$ y en particular esto implica que f no es una aplicación propia.

Por otro lado, en el marco de este escrito es natural preguntarse si es válido en dimensión infinita. Como ya hemos dicho antes, el teorema de Rabier se establece en un contexto general que incluye tanto el teorema de Hadamard de la sección anterior como el de Ehressman. Aquí daremos una versión súper simplificada *bajo el supuesto de que X y Y son espacios de Hilbert y $f : X \to Y$ es una función suave (continuamente diferenciable con derivada localmente Lipschitz).*

Antes que nada, es importante mencionar que la demostración de Ehressman tiene un punto de encuentro importante con la demostración que bosquejamos en la sección anterior. Siguiendo las ideas de Ehressman, para nuestro caso simplificado, en lugar de la ecuación (5) partimos de la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= s(q(t))w, \\ q(0) &= x, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $s(x) = df(x)^*[df(x)df(x)^*]^{-1}$ es una inversa derecha de $df(x)$ para todo $x \in X$. Fijo $w \in Y$, sea $q(t) = q(t,w)$ la solución de (6). También en este caso se tiene $f(q(t,w)) = f(x) + tw$ para todo t donde la solución está definida. Al igual que antes, dado $w \in Y$ y $x \in X$, la solución de la ecuación (6) existe y es única en un intervalo maximal. Supongamos que la solución se puede continuar hasta $t = 1$. Dado $x \in X$ y $w = -f(x)$ existe un único camino-solución $q(t) = q(t, -f(x))$ que comienza en x y termina en $f^{-1}(0)$, pues se tiene que

$$f(q(1)) = f(x) - f(x) = 0.$$

Debido a las propiedades de flujo que tienen las soluciones de (6), la asociación $x \mapsto (f(x), q(1))$ define un homeomorfismo $X \to Y \times f^{-1}(0)$, a la inversa de este homeomorfismo le llamaremos Φ. Note que $\pi(f(x), q(1)) = f(x)$. Por tanto, $f \circ \Phi = \pi$. Es decir, f es un fibrado trivial. Esta Φ es una suerte de función implícita global. Además, para todo y el conjunto de soluciones $f^{-1}(y)$ es homeomorfo a $\mathcal{F} = f^{-1}(0)$.

Ahora bien, la idea es poner condiciones del tipo Hadamard sobre f que impliquen que f es un fibrado trivial. El número que propone Hadamard $\mu_x = \operatorname{ínf}_{\|v\|=1} \|df(x)v\|$ tiene sentido aquí, pero tal como está no es útil. Por ejemplo, para la proyección π se calcula $\mu_x = \operatorname{ínf}_{\|v\|=1} \|d\pi(x)v\| = \operatorname{ínf}_{\|v\|=1} \|\pi v\| = 0$. De hecho para una proyección cualquiera se tiene que $\mu_x = 0$, pues entre otras cosas si $\mu_x > 0$ eso implica que $df(x)$ es uno a uno y eso a su vez implica que f alrededor de x es localmente como una inmersión. Por otro lado $df(x)$ es sobre si y solo si

$$\nu_x = \operatorname*{ínf}_{\|v^*\|=1} \|df(x)^* v^*\| > 0. \tag{7}$$

En este caso f es localmente como una proyección, como ya se ha dicho antes. Finalmente, si $df(x)$ es un isomorfismo entonces $\nu_x = \mu_x$. La clave de todo es que se cumple que $\nu_x \leq \|s(x)\|^{-1}$ por tanto es posible repetir *verbatim* el argumento (3) para concluir que si $\nu_x^{-1} < M$ entonces las soluciones q se pueden extender hasta asegurar que está definida para $t = 1$. Por tanto, el teorema de Rabier en nuestra versión simplificada es el siguiente (tomando $\alpha = \frac{1}{M}$), compárese con el teorema 2.1.

Teorema 3.2 (Rabier, 1997)**.** *Sea $f : X \to Y$ una función suave entre espacios de Hilbert tal que $df(x)$ es sobre, para todo $x \in X$. Si existe un $\alpha > 0$ tal que*

$$\operatorname*{ínf}_{\|v^*\|=1} \|df(x)^* v^*\| \geq \alpha, \ \textit{para todo } x \in X$$

entonces f es un fibrado trivial.

Nos resta ver qué sucede en este caso con la condición tipo integral de Hadamard. Supongamos que estamos bajo las hipótesis del teorema de Rabier y además que $f(0) = 0$. Para $r > 0$ sea

$$\varrho(r) = \int_0^r \operatorname*{ínf}_{\|x\| \leq \rho} \nu_x \, d\rho.$$

De forma similar que antes se cumple lo siguiente [7]: para todo $x \in X$ y $w \in Y$ tal que $\|w\| < \varrho(r)$ para algún $r > 0$, el camino solución $q(t, w)$ de (6) con condición inicial $q(0) = 0$ está definido para $t = 1$. Además tal que $\|q(t)\| < r$ para todo $t \in [0, 1]$. En particular, también en este caso se tiene que $B_{\varrho(r)} \subset f(B_r)$. La función $\sigma(w) = q(1, w)$ es una *sección global* de f, es decir $\sigma : Y \to X$ es una función continua tal que $f(\sigma(w)) = w$ para todo $w \in Y$. Por tanto se tiene lo siguiente:

Teorema 3.3. *Sea $f : X \to Y$ una función suave entre espacios de Hilbert tal que $df(x)$ es sobre, para todo $x \in X$, y $f(0) = 0$. Si $\varrho(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$ entonces existe $\sigma : Y \to X$ una sección global de f tal que:*

$$\sigma(w) < r, \text{ si } \|w\| < \varrho(r).$$

Resumiendo: el teorema 3.1 de Ehressmann es una generalización notable en el contexto de variedades de dimensión finita del teorema 2.2 de Banach-Mazur-Caccipioli, pero pierde interés en dimensión infinita, principalmente si consideramos funciones entre espacios de Banach. El teorema 3.2 de Rabier es una elegante opción que a su vez se relaciona con el teorema 2.1 de Hadamard-Levy. Finalmente, con el teorema 3.3 se cierra el círculo, pues este resultado es una extensión del teorema 1.2 de Hadamard que se expuso al inicio.

4. Agradecimientos

Quisiera agradecer muchísimo a los revisores anónimos, pues sus observaciones y sugerencias fueron muy acertadas.

Bibliografía

[1] A. Ambrosetti y G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[2] J. Appell, E. D. Pascale y A. Vignoli, *Nonlinear spectral theory*, Walter de Gruyter, 2004.

[3] S. Banach y S. Mazur, «Über mehrdeutige stetige Abbildungen», *Studia Math.*, vol. 5, núm. 1, 1934, 174–178.

[4] F. E. Browder, «Covering spaces, fibre spaces, and local homeomorphisms», *Duke Math. J.*, vol. 21, 1954, 329–336.
[5] R. Cacciopoli, «Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicacioni alle equazioni alle deivate parziali», *Atti Accad. Naz. Lincei*, vol. 16, 1932, 392–400.
[6] H. Cartan, *Differential calculus*, Hernann, Paris, 1971.
[7] O. Gutú, «On global inverse theorem», *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, vol. 49, 2017, 401–444.
[8] O. Gutú y J. A. Jaramillo, «Global homeomorphism and covering projections on metric spaces», *Math. Ann.*, vol. 338, 2007, 75–95.
[9] J. Hadamard, «Sur les transformations ponctuelles», *Bull. Soc. Math. France*, vol. 34, 1906, 71–84.
[10] D. Idczak, A. Skowron y S. Walczak, «On the diffeomorphism between Banach and Hilbert spaces», *Advanced Nonlinear Studies*, vol. 12, 2012, 89–100.
[11] F. John, «On quasi-isometric mappings I», *Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 21, 1968, 77–110.
[12] S. G. Krantz y H. R. Parks, *The implicit function theorem*, Birkhäuser, 2013.
[13] N. Krikorian, «Invariance of domain in Banach spaces», *Proc. A. Math. Soc.*, vol. 60, 1976, 367–368.
[14] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Springer, 1999.
[15] M. P. Levy, «Sur les fonctions de lignes implicites», *Bull. Soc. Math. France*, vol. 48, 1920, 13–27.
[16] J.-P. Penot, *Calculus without derivatives*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 266, Springer, 2013.
[17] R. A. Plastock, «Homeomorphism between Banach spaces», *Trans. A. Math. Soc.*, vol. 200, 1974, 169–183.
[18] P. J. Rabier, «Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds», *Ann. of Math.*, vol. 146, núm. 3, 1997, 647–691.
[19] W. C. Rheinboldt, «Local mapping relations and global implicit function theorems», *Trans. A. Math. Soc.*, vol. 138, 1969, 183–198.
[20] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer, 1966.
[21] C. C. Tseng y N. C. Wong, «Invertibility in infinite-dimensional spaces», *Proc. A. Math. Soc.*, vol. 128, núm. 2, 1999, 573–581.