Una Caracterización del Círculo

por Luis Montejano .

El American Mathematical Monthly del mes de Octubre de 1971 , publicó en su sección de Problemas de Investigación (Research Problems), el siguiente problema :

Sea C una curva plana, cerrada, simple, rectificable que posee perímetro p. Sea $x \in C$. A x le asociamos un único punto x' tal que la distancia sobre C de x a x' es $p/2$. Sea S_x el segmento de línea con extremos x y x'. A S_x le llamaremos Seudodiámetro de C con respecto a x. S_x también denotará la longitud del segmento de línea con extremos x y x'.

La función $S: C \to \mathbb{R}$, $S(x) = S_x$ es contínua con respecto a la distancia en C. Como C es compacto $S = \underset{x \in C}{\text{Min}}\, S_x$ existe .

Debido a que S es simple, S es positivo. A S le llamaremos Seudodiámetro de C .

Considérese p/S. Si C es un círculo con perímetro p, $p/S = \pi$. Los problemas son los siguientes :

1) ¿Es cierto que $p/S \geq \pi$ para toda curva plana, cerrada, simple, rectificable ?

2) $p/S = \pi$ caracteriza al círculo?

En este trabajo se contestará a estas preguntas. Es decir, se probará el siguiente teorema .

TEOREMA 1 Sea C una curva plana, cerrada, simple, rectificable, que posee perímetro p . Sea S el Seudodiámetro de C . Entonces $p/S \geq \pi$ y $p/S = \pi$ implica que C es un círculo .

TEOREMA 2 Dada una dirección u , existe $x \in C$ tal que S_x es paralela a u ,

<u>Prueba</u>

Sea $G_u : C \to R$.

G_u valuada en x es el ángulo orientado entre S_x y u .

Es fácil ver que G_u es contínua con respecto a la distancia en C . Sea $x_0 \in C$ y sea $x_0' \in C$ tal que la distancia sobre C de x_0 a x_0' es $p/2$.

Sea $G_u(x_0) = o$ entonces $G_u(x_0') = o + \pi$

Si $0 < \pi$ existe $y \in C$ tal que $G_u(y) = \pi$.

Si $0 \geq \pi$ existe $y \in C$ tal que $G_u(y) = 2\pi$.

Es decir, S_y es paralela a u.

TEOREMA 3 Sea C una curva plana, cerrada, simple, rectificable que posee perímetro p. Sea C' la frontera del casco convexo de C y supongamos que su perímetro es p', entonces $p' \leq p$.

La prueba del Teorema 3 la encontraremos en [1] .

<u>Definición</u> Sea $H_C : [0\ 2\pi) \to R$

donde H_C valuada en u es igual a la distancia entre dos líneas soporte de C paralelas a u H_C es continua .

TEOREMA 4 Sea A una curva plana, cerrada, convexa. Entonces el perímetro de A está dado por :

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} H_A(u)\, du .$$

Esta fórmula es una consecuencia de la fórmula de Cauchy [2] .

TEOREMA 5 Sea C una curva plana, cerrada, simple, rectificable que posee perímetro p. Sea S su Seudodiámetro. Entonces $p/S \geq \pi$ y $p/S = \pi$ implica que $S_x = p/\pi \;\; \forall \; x \in C$

$$H_C(u) = p/\pi \quad \forall \; u \in [0 \; 2\pi)$$

<u>Prueba</u>

Sea C' la frontera del casco convexo de C y sea p' su perímetro.

$$p' = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} H_{C'}(u) \, du \quad \text{por el Teorema 4}$$

Debido al Teorema 3

$$\tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} H_{C'}(u) \, du \leq p,$$ por el Teorema 2, existe $x \in C$ tal que $S_x \perp u$ y por lo tanto $S \leq S_x \leq H_{C'}(u) \;\; \forall \, u \in [0 \; 2\pi)$

esto implica que :

$$S \pi = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} S \, du \leq \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} H_{C'}(u) du \leq p$$

Con esto hemos probado la primera parte del Teorema 1 .

Supongamos que $p/S = \pi$. Entonces :

$$\int_0^{2\pi} H_{C'}(u) - S = 0 .$$

Como $H_{C'}(u) - S$ es positiva y contínua para toda $u \in [0,2\pi)$ $H_{C'}(u) = S$ y por lo tanto $H_{C'}(u) = p/\pi$ $\forall$ $u \in [0\ 2\pi)$ pero como $H_{C'}(u) = H_C(u)$ por ser C' la frontera del casco convexo de C

$$H_C(u) = p/\pi \quad \forall\ u \in [0,2\pi)$$

Además dado $x \in C$ $p/\pi = S \leq S_x \leq H_C(u) = p/\pi$ para u tal que $S_x \perp u$. Entonces :

$$S_x = p/\pi \quad \forall\ x \in C .$$

Con esto último se termina de probar el Teorema 5 .

Definición .- Una cuerda de C tal que las líneas de soporte de C perpendiculares a ella pasan por sus extremos se llama Binormal de C .

TEOREMA 6 Sea C una curva plana, cerrada, simple, rectificable que posee perímetro p. Sea S su Seudodiámetro. Supongamos que $p/S = \pi$. Entonces C es convexa, de ancho constante p/π y las binormales de C son los seudodiámetros de C con respecto a sus puntos.

Prueba

Sea $x \in C$, $S_x = p/\pi$. Como $H(u) = p/\pi$ para toda $u \in [0,2\pi)$

S_x es una binormal de C y por consiguiente existe una línea de soporte que pasa por v . Esto prueba que C es convexo [3].

C es de ancho constante puesto que $H(u) = p/\pi$ para toda $u \in [0, 2\pi)$. Sólo nos falta probar que toda binormal de C es un seudodiámetro de C con respecto a alguno de sus puntos. Sea Q una binormal de C . Por el Teorema 2 existe $x \in C$ tal que S_x es paralela a Q pero como C es de ancho constante $S_x = Q$.

Con esto se temina la prueba del Teorema 6 .

TEOREMA 7 Sea C un conjunto convexo, compacto, plano, de ancho constante B . Supongamos que toda Binormal de C divide a la frontera de C en 2 partes de longitud igual. Entonces C es un círculo .

Una prueba de esto puede verse en [4] ó [5] .

Prueba del Teorema 1

La primera parte está probada en el Teorema 5 . Para probar la segunda parte haciendo uso del Teorema 7 sólo nos falta ver que toda Binormal de C divide a C en dos curvas del mismo perímetro. Pero esto es cierto debido al Teorema 6 que afirma que toda Binormal es un seudodiámetro de C con respecto a un punto de C .

Con esto se termina la prueba del Teorema 1 .

REFERENCIAS

[1] Valentine F. "Convex Sets" Ma Graw Hill Book Company New York 1969. pp. 148 .

[2] H. G. Eggleston "Convexity" Cambridge University Press London. 1969. pp. 89 .

[3] Yaglom I and Bultyanskii "Convex Figures". Holt Rinehart Winston. Inc. New York, 1961. pp. 12

[4] Valentine F. "Convex Sets" see [1] p.p. 291

[5] Hirakowa "On a characteristie Property of the Circle" To'hoku Math. J. v. 37, p.p. 175-178, 1933.