Miscelánea Matemática **58** extraordinario (2014) 53-59 SMM

Recordando a Thomas Malthus y a Alfred Lotka

Manuel Ordorica Mellado

El Colegio de México

mordori@colmex.mx

Introducción

En el 2011 la población del mundo llegó a 7 mil millones de habitantes. Actualmente el crecimiento demográfico es de aproximadamente mil millones cada 12 años. En el 2025 según la hipótesis intermedia de Naciones Unidas en su última revisión, llegaremos a 8 mil millones. El siglo XX fue el periodo de mayor crecimiento demográfico de toda la historia. En un siglo, de 1900 al año 2000, la población del planeta pasó de alrededor de 1,600 millones a 6,100 millones de seres humanos. En una centuria, la población de la Tierra se multiplicó por 3.8 veces.

Mientras tanto en México, durante el siglo XX, la población pasaba de 13.6 millones de personas en 1900 a 97.5 millones en el año 2000. La población mexicana se incrementó en ese periodo siete veces. El siglo XX se podría llamar el del rápido crecimiento demográfico y el del rejuvenecimiento de la población mientras que el siglo XXI podría denominarse el del lento crecimiento de la población y el del envejecimiento.

Esta dinámica demográfica presentada, tanto a nivel mundial como nacional, puede ser explicada a partir de la teoría de las Ecuaciones Diferenciales. El sustento teórico de la Demografía Formal, relacionado con estimaciones y proyecciones de la población, utiliza a la Matemática como instrumento fundamental para su entendimiento y desarrollo. La teoría de las poblaciones estables utiliza Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones Integrales, Álgebra Lineal y Cálculo. Las proyecciones de población, por su parte, pueden ser analizadas a través del álgebra de matrices, aprovechando los conceptos que subyacen a este tipo de herramienta.

Una aplicación al tema de dinámica de poblaciones es la sorprendente sucesión de Fibonacci, la cual debe su nombre a Leonardo de Pisa (1179-1240), más conocido como Fibonacci. Él, además de ser un gran matemático, es conocido por una sucesión de números enteros en la que cada término es igual a la suma de los dos anteriores: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Esta sucesión representa muchas soluciones prácticas, pero la más conocida es la relacionada con una cría de conejos. Se supone que una pareja de conejos pueden tener descendencia una vez cada mes, a partir del segundo mes de vida, que no hay mortalidad de conejos y que cada hembra produce una nueva pareja de conejos de ambos sexos (conejo y coneja) cada mes. La pregunta es, ¿cuántas parejas de conejos hay al cabo de n meses? Los números que se generan producen la sucesión de Fibonacci. Esta regla es una excelente ejemplificación de la dinámica poblacional de los conejos pero podría utilizarse en este mismo sentido para otros casos.

Una obra que puede ser expresada desde un punto de vista matemático es el *Ensayo sobre el principio de población*, la cual fue publicada en el siglo XVIII originalmente en inglés como *An Essay on the Principle of Population* (1798). Es una obra de demografía escrita por el economista inglés Thomas Robert Malthus, en la que desarrolla la teoría de que la población crece más rápidamente que los recursos, conduciendo a un progresivo empobrecimiento de la población. Malthus fue uno de los pioneros en describir el crecimiento de la población mediante una fórmula matemática. Señalaba que mientras la población crece en progresión geométrica, los alimentos crecen siguiendo una progresión aritmética. Malthus en su ensayo sobre el principio de la población decía: «El hombre que nace en un mundo ya ocupado no tiene derecho alguno a reclamar una parte cualquiera de alimentación y está de más en el mundo. En el gran banquete de la naturaleza no hay cubierto para él. La naturaleza le exige que se vaya, y no tardará en ejecutar ella misma tal orden».

La teoría de Malthus tiene dos postulados. El primero dice que la población, cuando no se ve limitada, aumenta en progresión geométrica. El segundo postulado establece que en las circunstancias más favorables los alimentos no pueden aumentar más que en progresión aritmética. De estos dos postulados, Malthus llegó a una conclusión dramática: a menos que se tomaran medidas, vendría un momento en que los alimentos no alcanzarían para todos.

En su ensayo decía: «Si consideramos la totalidad de la tierra, en lugar de esta isla, claro está que quedaría excluida la posibilidad de la emigración; y, suponiendo la población actual a mil millones de habitantes, la especie humana aumentaría como la progresión de los números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, y las subsistencias como la de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Al cabo de dos siglos, la proporción entre la población y los medios de subsistencia sería como la de los números 256 y 9; al cabo de tres siglos, como la de los números 4096 y 13, y al cabo de dos mil años la diferencia sería incalculable». Si bien esta regla no se ha cumplido ni se cumplirá nunca nos habla del interés que existía sobre la relación entre la población y los recursos.

Un poco más de un siglo después de la publicación de Malthus nació Alfred James Lotka, en el año de 1880 en la ciudad de Lemberg, Austria, hoy Lvov, Ukrania.[1] Kingsland, 1995. Lotka es considerado como el padre de la Demografía Matemática, aunque hay que reconocer que Leonard Euler, casi dos siglos antes, desarrolló el concepto de estabilidad en demografía. Lotka avanzó en la definición de conceptos fundamentales de la demografía como el de población estable y población estacionaria.[3] Lotka, 1969. Demostró que toda población cerrada a la migración, en que se mantienen constantes las tasas de fecundidad y de mortalidad, tendrá una estructura por edad determinada y una tasa de crecimiento demográfico constantes. A continuación presentamos algunos de los elementos de su teoría demográfica apoyada en la matemática. Para realizar este documento nos hemos basado en su libro sobre la *Teoría analítica de las asociaciones biológicas*, publicado por el Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE) en 1969.

El número de habitantes de una población es función del tiempo. Para representar a la población se utilizará la letra N. El número de habitantes de una población en el momento t, se escribe como $N(t)$, siendo una función no negativa $N(t) \geq 0$, que puede tomar los valores enteros $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Es una función discontinua. Por comodidad en el tratamiento analítico, sin embargo, la supondremos continua y derivable.

En el análisis de la dinámica demográfica que se realizará en este documento se supone que la población es cerrada, es decir, una población cuyo efectivo recibe nuevas incorporaciones únicamente por nacimientos y sufre pérdidas solo por defunciones. Dicho de otra manera, están excluidas la inmigración y la emigración.

La tasa de crecimiento de la población se describe por:

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} \tag{1}$$

Denotamos por $B(t)$ al número de nacimientos anuales en el momento t y por $p(a,t)$ la probabilidad, en el momento del nacimiento, de que un individuo cualquiera nacido en la época $t-a$ esté con vida en el instante t, teniendo entonces la edad a. La probabilidad depende no solamente de la edad a sino del momento t. Esto significa que la mortalidad cambia en el tiempo. En el caso de que se suponga que $p(a,t)$ es independiente del tiempo, se denotará por $p(a)$, función muy utilizada en el cálculo actuarial.

Como el número de personas que llegan con vida al momento t está formado por la suma de todos aquellos que habiendo nacido en $t-a$ han llegado con vida a la edad a, donde $0 \leq a \leq \omega$, y ω es la edad más elevada posible para la especie humana, entonces:

$$N(t) = \int_0^{\omega} B(t-a)\ p(a)\ da \tag{2}$$

Esta ecuación permite establecer una relación entre la población, los nacimientos y la probabilidad de supervivencia.

El valor de ω es la edad más elevada de sobrevivencia de un ser humano. Hay una mujer llamada Jean Calment que vivió 122 años, por lo que ω podría alcanzar esta cifra. Calment es la campeona del mundo en longevidad. Cuando le preguntaron cómo es que había vivido tantos años, contestó: se lo debo a tres cosas, a mi aceite de oliva todos los días, a mi jerez todos los días y a mi habano todos los días. Desde el punto de vista de la mortalidad y la longevidad, las mujeres son el sexo fuerte, viven alrededor de cinco años más que los hombres.

Sea $c(a,t)$ la distribución por edad, es decir, el porcentaje de población de edad a en t, respecto a la población total, también en el momento t. El número de individuos a la edad a es igual a $N(t)c(a,t)$, por tanto se deduce que:

$$N(t)c(a,t) = B(t-a)p(a) \tag{3}$$

$$c(a,t) = \frac{B(t-a)}{N(t)}p(a) \tag{4}$$

El porcentaje de la población entre 0 y ω es igual a 1. Dicho de otra forma:

$$\int_0^{\omega} c(a,t)da = 1 \tag{5}$$

Si sustituimos en la fórmula (4) el valor de $a = 0$ se tiene:

$$c(0,t) = \frac{B(t)}{N(t)}\ p(0)$$

Se sabe que $p(0) = 1$, por tanto:

$$c(0,t) = \frac{B(t)}{N(t)}\ = b(t)$$

siendo $b(t)$ la tasa de natalidad. Esto significa que la tasa de natalidad es igual al valor de la estructura por edad de la población en la edad cero.

Por otra parte, las defunciones anuales se describen mediante la fórmula siguiente:

$$D(t) = \int_0^{\omega} B(t-a)p(a)\mu(a)da \tag{6}$$

donde $\mu(a)$ es la tasa instantánea de mortalidad. $D(t)$ es el número de defunciones en el instante t, que es igual a los nacimientos ocurridos en $t-a$, por la probabilidad de que esos nacimientos lleguen con vida a la edad a, en el momento t, por la probabilidad de que fallezcan a la edad a, también en t, lo que da como resultado el número total de defunciones a la edad a, que, al sumar las defunciones sobre todas las edades, nos da el total de muertes en el momento t.

Notemos que en el caso de que la tasa de crecimiento demográfico de la población sea constante, lo mismo que la tasa de natalidad (b) y la tasa de mortalidad (d), tenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} = r = b - d.$$

Teorema 1. *Bajo las hipótesis anteriores el crecimiento demográfico es exponencial. En efecto, al resolver la ecuación diferencial:*

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} = r$$

se tiene que:

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

Es decir, la población crece o disminuye según la ley de Malthus, esto es, la ley del crecimiento exponencial como la habíamos visto anteriormente.

Como b y d también permanecen constantes, entonces se puede ver fácilmente que $B(t)$ y $D(t)$ crecen en forma exponencial. De este modo, la población total, los nacimientos anuales y las defunciones anuales siguen la ley de Malthus, es decir la ley del interés compuesto.

$$B(t) = B(0)e^{rt} \tag{7}$$

$$D(t) = D(0)e^{rt} \tag{8}$$

La fórmula (4) se puede transformar tomando en cuenta las ecuaciones anteriores:

$$c(a) = be^{-ra}p(a) \tag{9}$$

A partir de la relación

$$\int_0^{\omega} c(a)da = 1 \tag{10}$$

al sustituir la ecuación (9) en (10) se tiene:

$$1 = \int_0^{\omega} be^{-ra}p(a)da.$$

Por tanto

$$b = \frac{1}{\int_0^{\omega} e^{-ra}p(a)da} \tag{11}$$

En el caso particular de $r = 0$ en la ecuación (9) se tiene:

$$c(a) = bp(a)$$

y

$$b = \frac{1}{\int_0^{\omega} p(a)da} = d \tag{12}$$

La ecuación (12) significa que la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad son iguales entre sí y que ambas son iguales al inverso de la esperanza de vida al nacer en el caso de una población estacionaria. Esta población se define como cerrada a la migración, con tasas de natalidad y de mortalidad constantes y con una tasa de crecimiento demográfico igual a cero.

Las relaciones (9) y (11) son insuficientes para definir los valores de b, d y r. Es necesario incorporar una nueva relación que considere la fecundidad de la población bajo estudio.

Los nacimientos en el momento t pueden ser expresados de la forma siguiente, tomando en cuenta, por cuestiones prácticas, solo a la población femenina:

$$B(t) = \int_0^{\infty} B(t-a)\ p(a)\ m(a)\ da \tag{13}$$

donde $B(t-a)$, en este caso, son los nacimientos de mujeres en la época $t-a$, por la probabilidad de que esos nacimientos lleguen con vida a la edad a en el momento t, multiplicado por la fecundidad de las mujeres en la edad a, en el tiempo t. El resultado es el número de nacimientos de las mujeres de edad a, en t. Si integramos sobre todos los valores de a, tenemos los nacimientos totales en el tiempo t. Esta es una ecuación que relaciona los nacimientos de las mujeres en la época t con los nacimientos de las madres en los tiempos anteriores. En sentido estricto, los límites de la integral se ubican entre los 15 y los 50 años.

Al sustituir la ecuación (7) en la (13) se obtiene:

$$1 = \int_0^{\infty} e^{-ra}\ p(a)\ m(a)\ da \tag{14}$$

La ecuación (14) tiene una sola raíz real, que es la tasa de crecimiento de la población en la estabilidad. Dicho de otra manera es «la capacidad fundamental de multiplicación de la población, liberada de la influencia perturbadora de una distribución inicial, por edad, arbitraria».[2] Lotka, 1969. Con estas ecuaciones es posible tener el panorama completo de los componentes de la dinámica demográfica bajo el supuesto de población cerrada.

Una breve reflexión final

Hemos presentado un pequeño conjunto de ecuaciones iniciales trabajadas por Lotka, que describen la dinámica demográfica de poblaciones bajo el supuesto de que la tasa de natalidad y la de mortalidad permanezcan constante en el tiempo y que no haya entrada ni salidas de población. Las poblaciones que se rigen bajo esos supuestos crecen en forma exponencial.

En síntesis, el campo de la Demografía Matemática tiene en Alfred Lotka a uno de los pioneros y máximos inspiradores de las Matemáticas de la Población.

Bibliografía

[1] N. Bacaër, *A short history of mathematical population dynamics*, Springer-Verlag, Londres, 2011.

[2] S. E. Kingsland, *Modeling nature: episodes in the history of population ecology*, The University Chicago Press, Chicago, 1995.

[3] A. Lotka, *Teoría analítica de las asociaciones biológicas*, Centro Latinoamericano de Demografía, Santiago de Chile, 1969.