Miscelánea Matemática **40** (2004) 1–15 SMM

¿Realmente imposible?

Rafael G. Campos[1] y Cynthia Hixahuary Sánchez Tapia[2]

[1]Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Michoacana
58060, Morelia, Mich.
México

[2]Facultad de Ciencias
Universidad de Colima
28045, Colima, Col.
México

rcampos@zeus,umich.mx,
hixahuary@ucol.mx

Resumen

Usando algunas propiedades del grupo diédrico, se da una prueba simple de que que ciertos arreglos de los números de un famoso rompecabezas (llamado en inglés *the fifteen puzzle*) no son posibles de realizar.

Keywords: Rompecabezas. quince imposible, grupo diédrico.

1. Introducción.

Como *homo sapiens* tenemos una curiosidad nata que nos impulsa a realizar distintas cosas. Algo que a muchos *sapiens* nos agrada es el hecho de lograr la solución de un rompecabezas. ¿Quién no se ha enfrentado al rompecabezas que consiste en un cuadrado con 15 cuadritos en arreglo de 4×4 que pueden deslizarse sobre el cuadrado grande para tratar de reacomodarlos en arreglos predeterminados? Ese famoso cuadrado con quince números y un espacio que nos permite realizar un movimiento a la vez se ilustra en la Figura 1.

De acuerdo a datos sobre la historia de este rompecabezas (ver por ejemplo [1] y referencias citadas), fue alrededor de 1878 cuando

Figura 1: Grabado que ilustra el rompecabezas.

Sam Loyd *llevó el mundo a la locura* al hacer una variación de otro rompecabezas distribuído por la Embossing Company de Nueva York 10 años antes, dando lugar al famoso cuadro con quince cifras.

Este problema y sus variantes han llamado la atención de muchos matemáticos y desde 1879 se concoce que no todos los arreglos son posibles de llevar a cabo [2]. Sin embargo el interés por las matemáticas de este rompecabezas y algunas variantes de él se ha mantenido hasta nuestros días. La teoría de grupos finitos y la teoría de gráficas se han usado en el análisis de este problema ([1]-[3]) y se han desarrollado algoritmos para resolver (en caso de que sea posible) una configuración dada en un cuadrado de $N \times N$ [4]. Incluso los creadores de *Mathematica* distribuyen un *notebook* para determinar si es posible resolver una configuración dada en el de 4×4. Dos páginas de internet interesantes sobre este problema están dadas en las referencias. En una de ellas se habla de la historia de este rompecabezas.

Es probable que todos en alguna ocasión nos hayamos encontrado con el problemita del llamado *imposible*, y tal vez muchos, al igual que nosotros, lo hicieron *posible* quitando una ficha para tener dos casillas de espacio. El objetivo de este artículo es dar una respuesta, mediante argumentos más sencillos que los tratamientos formales dados en las referencias, a la pregunta ¿porqué no es posible realizarlo?

2. Análisis.

La siguiente figura muestra el acomodo llamado *horizontal*, el cual será para nosotros el punto de partida. Los movimientos permitidos en este rompecabezas son los de los puntos cardinales. Partiendo del

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 2: Acomodo horizontal del rompecabezas.

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

Figura 3: Acomodo imposible del rompecabezas

horizontal podemos ver que con el primer movimiento sólo tenemos dos opciones: sur o este y nos interesa saber si a partir de aquí es posible alcanzar una configuración dada, en particular el acomodo llamado *imposible*, que se ilustra en la Figura 3. Observando la configuración inicial (el *horizontal*) y la configuración final (el *imposible*) podemos ver que el hueco (al cual llamaremos casilla *cero*), permanece en su mismo sitio, al igual que el número ocho. El cero permanece en su lugar por restricción, mientras que el 8 lo hace porque en ambos acomodos las casillas aparecen ordenadas en cuatro columnas en orden creciente, comenzando con 1, o decreciente, comenzando con 15.

Para saber si es posible llegar al *imposible* partiendo del *horizontal*, debemos notar que el problema se reduce a considerar un cuadrado de 2×2, en lugar del cuadrado original de 4×4, pues al llevar cada casilla al lugar que le corresponde mediante el uso del cero, van quedando menos casillas qué ordenar, hasta que eventualmente llegaremos a un arreglo

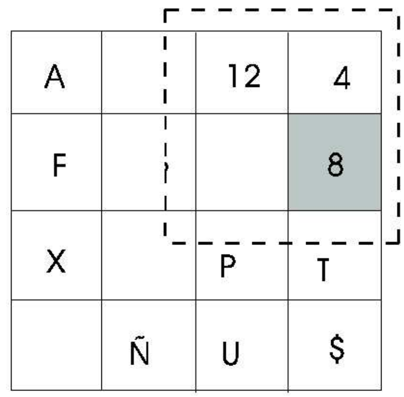

Figura 4: Muestra lasituación al tratar de intercambiar el 4 con el 12.

de 2×2 que incluye al cero. Para saber si el arreglo final de 2×2 puede ordenarse de acuerdo a la configuración deseada, estudiemos un arreglo de 2×2 que se da al tratar de ordenar de acuerdo a la configuración del *imposible* la última columna, es decir, al tratar de llevar la casilla 4 al 12 y viceversa manteniendo al 8 fijo (ya que éste siempre debe regresar a su sitio original). Este arreglo de 2×2 es mostrado en la Figura 4. Para saber si es posible mandar la casilla 12 al lugar de la casilla 4 en esta configuración tomaremos como base de estudio la acción del grupo diédrico D_4 sobre las cuatro casillas ya que esta acción representa todas las rotaciones de un cuadrado rígido cuyos vértices pueden identificarse con las casillas del arreglo.

3. Grupo diédrico D_4.

La figura 5 muestra un cuadrado al que le estudiaremos sus movimientos rígidos, es decir, los movimientos que no alteran su forma. Se han identificado sus vértices con números externos (fijos) y los números internos cambiarán de acuerdo a la posición final del cuadrado. Nótese que cada movimiento de este cuadrado puede obtenerse por medio de dos operaciones fundamentales (los generadores del grupo)

1. a: Una rotación de π alrededor de un eje de simetría en el plano del cuadrado (p. ej. el eje norte-sur que pasa por el centro del cuadrado).

2. b: Una rotación de $\pi/2$ del cuadrado alrededor del eje perpendicular que pasa por su centro.

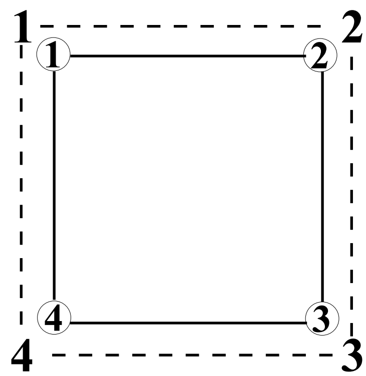

Figura 5: Cuadrado al que se le analizarán sus movimientos rígidos.

Estas dos operaciones y sus potencias o productos, generan los ocho elementos de este grupo: $D_4 = \{e, a, b, b^2, b^3, ab, ba, ab^2\}$, que resulta ser un subgrupo del grupo simétrico S_4. La acción de este grupo sobre el conjunto de vértices se enlista a continuación (los números superiores indican la posición inicial del cuadrado y los inferiores la posición final):

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$ab^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Estos son todos los movimientos permitidos a un cuadrado rígido. Sin embargo, el cuadrado 2×2 de nuestro rompecabezas encerrado por una línea quebrada en la Figura 4 no es precisamente un cuadrado rígido ya que gracias a la casilla *cero* le es posible *torcerse* sobre los ejes de simetría paralelos a los lados. En la Figura 6 se ilustra una torcedura alrededor del eje de simetría horizontal. La vacuidad de esta casilla le permite realizar al cuadrado las torceduras mostradas en la Figura 7, que no pueden presentarse en un cuadrado rígido. Observando las torceduras que puede realizar este cuadrado vemos que ninguna soluciona nuestro problema. Tampoco los movimientos rígidos son solución, es decir, el movimiento buscado no está en las órbitas generadas por el grupo. Esto se debe a que el movimiento de uno de los vértices conlleva

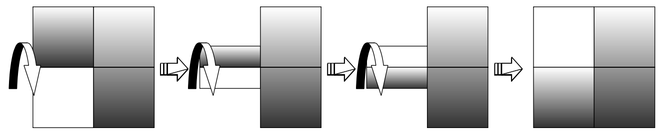

Figura 6: La casilla *cero* permite torcerduras en el cuadrado 2×2.

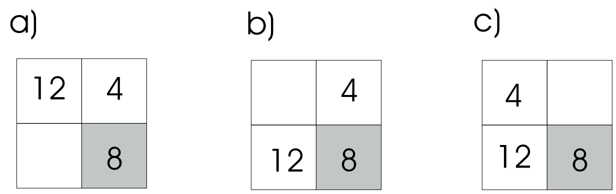

Figura 7: Torceduras permitidas al cuadrado 2×2.

el movimiento de los demás. Si a la casillas $12, 4, 8$, y 0 les asignamos los números $1, 2, 3$, y 4 respectivamente, entonces la tabla de acción del grupo dada anteriormente muestra que el movimiento que resuelve nuestro problema, i.e., la transposición $1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 3$ y $4 \to 4$, no existe.

Por lo anterior podemos entonces concluir que el *imposible* en realidad es imposible de realizar. Lo que hacemos cuando intentamos resolver el problema es acomodar casilla tras casilla en el orden requerido hasta llegar a un cuadrado 2×2 sin solución.

4. Otros casos.

Esta respuesta negativa es válida también para otras configuraciones finales tomando como configuración inicial el *horizontal*. Por ejemplo, cada arreglo inverso de los acomodos *vertical, diagonal, caracol y espiral* no son posibles de realizar pues éstos son un reacomodo del *horizontal*, por lo que si fuera posible enviar el *horizontal* al *imposible* también sería posible mandar cualquier reacomodo del *horizontal* a reacomodos del *imposible*.

Referencias

[1] Aaron F. Archer, *A Modern Treatment of the 15 Puzzle*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), 793–799.

[2] W.W. Johnson, *Notes on the 15 Puzzle. I.*, Amer. J. Math. **2** (1879), 397–399.

[3] R.M. Wilson, *Graph puzzles, homotopy, and the alternating group*, J. Combin. Th. Ser. B, (1974), 86–96.

[4] Richard Hayes, *The Sam Loyd 15-Puzzle*, Technical Report TCD-CS-2001-24, Department of Computer Science, University of Dublin, Dublin, Ireland, 2001

[5] Eric W. Weisstein, *15 Puzzle*, from MathWorld, A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/15Puzzle.html

[6] A. Bogomolny, *Sam Loyd's Fifteen*, http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/history15.shtml