Miscelánea Matemática **72** (2021) 51-65 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7203

Sumas de potencias de números naturales

J. Urías
Instituto de Física, UASLP
juriash@gmail.com

1. Introducción

El cálculo de la suma de los primeros n números naturales a la potencia p,

$$\sigma_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p \ , \qquad p \in \mathbb{N}_0 \ , \tag{1}$$

capturó un doble interés en Europa a principios del siglo XVII [4, 3]. Las sumas de potencias fueron fundamentales en la estimación de las cuadraturas de hipérbolas, parábolas y potencias mayores. Pero también hubo quienes se interesaron en las sumas de potencias por los números mismos, ignorando sus aplicaciones a las cuadraturas. Por ejemplo, Johann Faulhaber en Alemania logró descubrimientos notables que publicó en 1631 en un folleto titulado *Academia Algebrae* (Álgebra académica) [6].

Faulhaber descubrió que para las potencias impares la suma (1) es un polinomio en la variable $x = \sigma_1(n) = n(n+1)/2$ y para las potencias pares la suma (1) es el producto de $\sigma_2(n)$ por un polinomio en la variable $x = \sigma_1(n)$. Esto le permitió derivar reglas para calcular los polinomios $\sigma_p(n)$. El primero de los polinomios de Faulhaber es ya de gran interés,

$$\sigma_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \Big(1 + 2 + \cdots + n\Big)^2 = \big(\sigma_1(n)\big)^2 \ , \tag{2}$$

pues muestra que la suma de cubos es un cuadrado perfecto.

En Francia, a unos pocos años de la publicación del folleto de Faulhaber, surgieron las soluciones de Pierre de Fermat y de Blaise Pascal. Fermat nunca escribió algo a propósito de las sumas de potencias. Lo que se sabe se encuentra en la correspondencia que Fermat sostenía con Gilles Personne de Roberval y con el padre Marin Mersenne [9]. En

Palabras clave: sumas de potencias, Faulhaber, Fermat, Pascal, Bernoulli, Catalan, aritmética, transformaciones lineales, matemáticas para calcular.

sus cartas Fermat anuncia haber descubierto una relación de recurrencia para los números del triángulo de Pascal que le permitía resolver el problema de las sumas de potencias, calificándolo como «el problema que tal vez sea el más bello de toda la matemática», poniendo de manifiesto que los números fueron su pasión.

Como parte de sus investigaciones sobre el triángulo aritmético,[1] Pascal ideó un método práctico para calcular los polinomios $\sigma_p(n)$. El método se basa en que al sumar una diferencia atrasada, $\big(\nabla f\big)(n) := f(n) - f(n-1)$, los sumandos (excepto dos) se cancelan y la suma se colapsa a los dos elementos extremos. Aplicado al binomio $f(n) = (n+1)^p$, el método de Pascal proporciona la relación lineal entre los polinomios $\sigma_p(n)$ y las potencias n^p.

En su libro *El arte de conjeturar* [1] Jacob Bernoulli reduce el problema de las sumas de potencias a su núcleo esencial. Bernoulli tenía un hábil manejo de la rica estructura de patrones formados por los números figurados [3, pp 134–135] que le permitió ver que los coeficientes de los polinomios $\sigma_p(n)$ se organizan en secuencias que derivan de secuencias de números figurados mediante la multiplicación por números especiales, ahora conocidos como números de Bernoulli. Así fue como el problema se redujo al cálculo de los números de Bernoulli.

Con el propósito de contrastar diferentes maneras de atacar un mismo problema, a continuación presentamos una reconstrucción en notación matemática moderna de las soluciones clásicas a las sumas de potencias. Veremos cómo Bernoulli llega a la esencia del problema y ofrece una solución unificada. Argumentaremos que los resultados de Faulhaber son el inicio de una exploración de la estructura del conjunto de polinomios $\sigma_p(n)$. En cuanto a Fermat, Pascal y Catalan veremos que ellos ofrecen métodos para calcular las sumas de potencias. Los métodos de Fermat y Catalan son *ad hoc* al problema en cuestión, en tanto que Pascal propone un método general para el cálculo de sumas. Aplicaremos el método de Pascal para demostrar la conjetura de Bernoulli y dos de los tres resultados principales de Faulhaber. El tercero es un corolario de los dos primeros.

2. La solución de Bernoulli

En *El arte de conjeturar*[2] Bernoulli incluye un compendio de los primeros diez polinomios $\sigma_p(n)$. La observación clave para generar la lista

[1] Usamos el extracto del *Potestatum numericarum summa* que Pangelly incluye en la referencia [8, pp.12–17], traducido al inglés con el título *Sums of numerical powers*.

[2] Usamos el extracto del *Ars Conjectandi* reproducido por Pangelly en la referencia [8, pp 21–25], en una traducción del latín al inglés de Daniel E. Otero. También está la traducción del *Ars Conjectandi* completo, hecha por E. Dudley Sylla. [1]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							
7	1	7	21	35	35	21	7	1						
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1					
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1

Figura 1. Tabla de números figurados (triángulo de Pascal).

de polinomios es la identidad

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{j-1}{k-1} = \binom{n}{k} , \tag{3}$$

que Bernoulli convierte en una relación entre polinomios. El coeficiente binomial da lugar al *polinomio factorial*

$$g_k(n) = k!\binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) ,$$

de grado k y con ceros en $n = 0, 1, \ldots, k-1$. Haciendo el remplazo de n por $n+1$ y de k por $k+1$ en la identidad (3), se obtiene la recurrencia

$$\sum_{j=1}^{n} g_k(j) = \frac{1}{k+1} g_{k+1}(n+1) , \qquad k \geq 1 , \tag{4}$$

con la cual se pueden calcular las sumas de potencias. Catalan en la referencia [2] comenta que a partir de valores moderados de k (≥ 5) el uso de (4) se vuelve tedioso. Para tener una idea de la labor, el cálculo de $\sigma_4(n)$ parte de la identidad

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} g_4(j) &= \sum_{j=1}^{n} j(j-1)(j-2)(j-3) \\ &= \sigma_4(n) - 6\sigma_3(n) + 11\sigma_2(n) - 6\sigma_1(n) \\ &= \frac{1}{5}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) , \end{aligned} \tag{5}$$

que requiere del cálculo previo de las sumas $\sigma_3(n)$, $\sigma_2(n)$ y $\sigma_1(n)$, y además hay necesidad de expandir el polinomio factorial $g_4(j)$. Para ganar experiencia, la recomendación es hacer como Bernoulli y calcular las primeras diez sumas $\sigma_p(n)$ usando la recurrencia (4).

El paso decisivo lo dio Bernoulli al descubrir que la secuencia formada por los coeficientes de los términos n^k de los polinomio $\sigma_{p+k}(n)$, $k \in \mathbb{N}$, se obtiene multiplicando la secuencia de números figurados en la diagonal $p+1$ de la tabla en la figura 1, por el primer coeficiente en la secuencia (el del término n de $\sigma_{p+1}(n)$) y si se les divide entre el lugar k que ocupan en la diagonal. Haciéndolo para la diagonal $p+1=6$ de la figura 1 —la secuencia $(1, 7, 28, 84, 210, \ldots)$— la regla dice dividir cada número figurado por su orden en la diagonal y multiplicar la lista por el número racional $\mathcal{B}_6 = 1/42$, que es el coeficiente del término n de $\sigma_6(n)$ ($\mathcal{B}_6$ es tomado de la lista de polinomios calculados por Bernoulli). Esto es

$$\frac{1}{42} \cdot \left(\frac{1}{1}, \frac{7}{2}, \frac{28}{3}, \frac{84}{4}, \frac{210}{5}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{42}, \frac{1}{12}, \frac{2}{9}, \frac{1}{2}, 1, \ldots\right), \tag{6}$$

que nos da los coeficientes de n^k de los polinomios $\sigma_{5+k}(n)$.

Su descubrimiento le llevó a la regla general que, transcrita a la notación actual, es la siguiente,

$$\begin{aligned} \sigma_p(n) = & \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + A \frac{p}{2}\, n^{p-1} + B \binom{p}{3} \frac{1}{4}\, n^{p-3} \\ & + C \binom{p}{5} \frac{1}{6}\, n^{p-5} + D \binom{p}{7} \frac{1}{8}\, n^{p-7} + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

En esta formulación Bernoulli designa los números que encabezan las secuencias de coeficientes como $A(= \mathcal{B}_2 = 1/6)$, $B(= \mathcal{B}_4 = -1/30)$, $C(= \mathcal{B}_6 = 1/42)$, $D(= \mathcal{B}_8 = -1/30)$, $\ldots$, dejando en claro que el problema de las sumas de potencias se reduce al cálculo de los números $A, B, C, D, \ldots$ La conjetura (7) de Bernoulli es conocida como fórmula de Faulhaber,

$$\sigma_p(n) = \sum_{m=0}^{p} \frac{\mathcal{B}_m}{p-m+1} \binom{p}{m} n^{p+1-m}, \tag{8}$$

con la observación importante de que los números $\mathcal{B}_m$ son los mismos para todos los polinomios $\sigma_p(n)$. Resulta que todos los $\mathcal{B}_{2m+1}$, $m \geq 1$, son cero.

Según la conjetura (8), la suma $\sigma_p(n)$ es un polinomio de grado $p+1$ que no tiene término constante y el coeficiente del término n es el número de Bernoulli $\mathcal{B}_p$. Esto será demostrado en la sección 4.

3. La solución de Fermat

En la primera mitad del siglo XVII los matemáticos usaban las sumas de potencias para estimar la cuadratura de las hipérbolas, las parábolas y potencias mayores. En estos ejercicios jugaron un papel importante los *números figurados*, que son el número de elementos que constituyen versiones discretas de las figuras geométricas básicas: los símplices discretos. El tamaño del simplex discreto de dimensión p se mide por «la longitud» n de sus aristas y su volumen es el número figurado $\left\|\begin{smallmatrix}p\\n\end{smallmatrix}\right\|$. La figura 1 es una tabla de números figurados.

El número $\left\|\begin{smallmatrix}p\\n\end{smallmatrix}\right\|$ de elementos en un simplex discreto de dimensión p y de tamaño n se define por la condición de apilamiento

$$\left\|\begin{matrix}p+1\\n+1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}p\\n+1\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}p+1\\n\end{matrix}\right\| , \qquad \text{con} \begin{cases} \left\|\begin{smallmatrix}0\\n\end{smallmatrix}\right\| = 1 \ , & n \geq 1 \\ \left\|\begin{smallmatrix}p\\1\end{smallmatrix}\right\| = 1 \ , & p \geq 0 \end{cases} . \tag{9}$$

La condición se ilustra para un triángulo, con $p+1=2$ y $n+1=4$, en el siguiente dibujo.

De la definición (9) resulta que para un punto $\left\|\begin{smallmatrix}0\\n\end{smallmatrix}\right\| = 1$, para un segmento $\left\|\begin{smallmatrix}1\\n\end{smallmatrix}\right\| = n$ y para un triángulo $\left\|\begin{smallmatrix}2\\n\end{smallmatrix}\right\| = \frac{1}{2}n(n+1)$. Es un buen ejercicio usar la definición (9) para calcular los números figurados $\left\|\begin{smallmatrix}p\\n\end{smallmatrix}\right\|$ para dimensiones $p \geq 3$ y así ganar experiencia para demostrar que la recurrencia (9) se resuelve en la siguiente fórmula,

$$\sum_{k=1}^{n} \left\|\begin{matrix}p\\k\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}p+1\\n\end{matrix}\right\| . \tag{10}$$

Un ejemplo de (10) es el apilamiento de triángulos $\sum_{k=1}^{n} \left\|\begin{smallmatrix}2\\k\end{smallmatrix}\right\| = \left\|\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right\| + \cdots + \left\|\begin{smallmatrix}2\\n\end{smallmatrix}\right\|$ que produce la pirámide $\left\|\begin{smallmatrix}3\\n\end{smallmatrix}\right\|$. Fermat descubrió [9] que los números figurados satisfacen la recurrencia

$$(p+1)\left\|\begin{matrix}p+1\\n\end{matrix}\right\| = n \left\|\begin{matrix}p\\n+1\end{matrix}\right\| . \tag{11}$$

Otro buen ejercicio es mostrar que la recurrencia (11) se resuelve en la siguiente fórmula

$$\left\|\begin{matrix}p\\n\end{matrix}\right\| = \frac{1}{p!}\, g_p(n+p-1) = \binom{n+p-1}{p} . \tag{12}$$

En sus cartas Fermat asegura que la recurrencia (11) le permite calcular cualquier suma de potencias pero no revela cómo lo hacía. En cambio, reta a sus corresponsales a descubrir su secreto [9]. Pero la recurrencia (11) no es suficiente. Es necesaria además la condición de apilamiento directo (10).

Eliminando los números figurados de (10), mediante la fórmula (12), se obtiene la recurrencia

$$\sum_{j=1}^{n} g_p(j+p-1) = \frac{1}{p+1}\, g_{p+1}(n+p) . \tag{13}$$

Después de remplazar en (13) n por $n+1-p$ $\big($considerando en la suma que $g_p(x) = 0$ para $x \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}\big)$ vemos que el método para resolver las sumas de potencias que Fermat pudiera haber guardado en secreto (y que nunca mostró) [9] es idéntico a la recurrencia (4) de Bernoulli.

4. Formulación matricial

Para ir a la formulación matricial necesitamos demostrar primero que las sumas de potencias $\sigma_p(n)$ en (1) son polinomios sin término constante y de grado $p+1$. Empezamos por derivar una relación de recurrencia para las sumas $\sigma_p(n)$. La observación de que los sumandos en la doble suma $\sum_{j=1}^{n} \sigma_p(j)$ pueden ordenarse de dos maneras diferentes conduce a lo siguiente.

Lema 4.1. *La suma de potencias $\sigma_p(n)$ es solución de la recurrencia*

$$\sigma_{p+1}(n) = (n+1)\sigma_p(n) - \sum_{k=1}^{n} \sigma_p(k) \ , \qquad p \geq 0 \ , \tag{14}$$

con condición inicial $\sigma_0(n) = n$.

Demostración. A partir de la definición (1) se tiene la siguiente derivación

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \sigma_p(k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} j^p = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) k^p \\ &= (n+1)\sigma_p(n) - \sigma_{p+1}(n) \ , \end{aligned} \tag{15}$$

que culmina en la recurrencia anunciada. □

La recurrencia demostrada en el lema 4.1 es la regla de inducción que nos lleva a lo siguiente.

Corolario 4.2. *La suma de potencias $\sigma_p(n)$ es un polinomio en n de grado $p+1$ que no tiene término constante.*

Demostración. La primera parte es por inducción, partiendo de $\sigma_0(n) = n$. Para la segunda parte, sea c_p el término constante de $\sigma_p(n)$, de manera que $\sigma_p(n) = c_p + \mathcal{O}(n)$, donde todos los términos de $\sigma_p(n)$ que son de grado al menos n se recogen en $\mathcal{O}(n)$. Se tiene que $c_0 = 0$, pues $\sigma_0(n) = n$. La suma en (14),

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_p(j) = \sum_{j=1}^{n} c_p + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}(n^j) = nc_p + \mathcal{O}(n) \ ,$$

no tiene término constante ya que $\sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}(n^j) = \mathcal{O}(n)$ son términos también de grado al menos n. Entonces (14) en el lema 4.1, evaluada en $n = 0$, nos da que $c_{p+1} = c_p$, con $c_0 = 0$. $\square$

El lema 4.1 implica que $\sigma_p(n)$ es un polinomio sin término constante de grado $p+1$ y aporta una definición recursiva de los polinomios. Esto nos autoriza a introducir la siguiente definición de los coeficientes de $\sigma_p(n)$,

$$\sigma_p(n) = \sum_{k=1}^{p+1} C_{p+1,k}\, n^k \ . \tag{16}$$

Desde el punto de vista del espacio lineal de los polinomios sin término constante y con coeficientes racionales, la definición (16) es una transformación lineal de la base $\{n^k : k \in \mathbb{N}\}$ a la base $\{\sigma_p(n) : p \in \mathbb{N}_0\}$. Podemos entonces considerar a los coeficientes $C_{i,k}$, con índices i, $k \in \mathbb{N}$, como las entradas de la matriz C que realiza la transformación (16). Por la definición (16) se tiene que $C_{i,k} = 0$ cuando $k > i$, por lo que la matriz C es triangular-inferior. Los números de Bernoulli son $\mathcal{B}_m = C_{m+1,1}$.

En el método de Bernoulli (descrito al final de la sección 5) interviene una propiedad de la matriz C que resulta de la definición (1). Evaluada en $n = 1$ nos da que $\sigma_p(1) = 1$, lo que implica para los coeficientes definidos en (16) la siguiente regla de suma,

$$\sum_{k=1}^{p} C_{p,k} = 1 \ , \qquad p \geq 1 \ , \tag{17}$$

que nos dice que las entradas en cada renglón de la matriz C suman uno.

Un método numérico simple para calcular los polinomios $\sigma_p(n)$ se obtiene sustituyendo la definición (16) en la recurrencia (14) del lema 4.1. Después de hacer la sustitución se identifican los coeficientes del término n^k y se obtiene la siguiente recurrencia,

$$C_{p+1,k} = \frac{1}{C_{p,p}}\Big(C_{p,k-1} + C_{p,k} - \sum_{j=1}^{p-1} C_{p,j}C_{j+1,k}\Big) \ , \tag{18}$$

con valor inicial $C_{1,1} = 1$.

En la figura 2 se muestran los primeros 12 renglones de la matriz C calculados con la recurrencia (18). Cada columna de la tabla en la figura 2 corresponde a una potencia n^k. Los coeficientes del polinomio $\sigma_p(n)$ son las entradas en el renglón p de la figura 2. Por ejemplo, el polinomio $\sigma_9(n)$ lo da el renglón $p = 9$,

$$\sigma_9(n) = \frac{1}{20}\Big(- 3n^2 + 10n^4 - 14n^6 + 15n^8 + 10n^9 + 2n^{10}\Big) \ . \tag{19}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1											
1	1/2	1/2										
2	1/6	1/2	1/3									
3	0	1/4	1/2	1/4								
4	−1/30	0	1/3	1/2	1/5							
5	0	−1/12	0	5/12	1/2	1/6						
6	1/42	0	−1/6	0	1/2	1/2	1/7					
7	0	1/12	0	−7/24	0	7/12	1/2	1/8				
8	−1/30	0	2/9	0	−7/15	0	2/3	1/2	1/9			
9	0	−3/20	0	1/2	0	−7/10	0	3/4	1/2	1/10		
10	5/66	0	−1/2	0	1	0	−1	0	5/6	1/2	1/11	
11	0	5/12	0	−11/8	0	11/6	0	−11/8	0	11/12	1/2	1/12

Figura 2. Un trozo de la matriz C.

A continuación reconstruimos el método de Pascal para aplicarlo a la matriz C, para luego demostrar la conjetura de Bernoulli.

5. El método de Pascal

Casi al final de su *Tratado del triángulo aritmético* (1654), Pascal describe un método para calcular las sumas de potencias, que ilustramos con el siguiente ejemplo. La diferencia

$$(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \tag{20}$$

al ser sumada en k de 1 a n, el lado izquierdo se contrae como un telescopio y el lado derecho da una suma de sumas de potencias. El resultado

$$(n+1)^5 - 1 = 5\sigma_4(n) + 10\sigma_3(n) + 10\sigma_2(n) + 5\sigma_1(n) + n\ ,$$

es una recurrencia para el polinomio $\sigma_4(n)$, que requiere para su cálculo de las tres sumas previas. El ejemplo se generaliza usando el teorema binomial (cambiando la potencia 5 por $p+1$) para calcular un polinomio $\sigma_p(n)$ arbitrario,

$$\big((n+1)^p - 1\big)(n+1) = (p+1)\sigma_1(n) + \binom{p+1}{2}\sigma_2(n) + \cdots + \binom{p+1}{p}\sigma_p(n)\ . \tag{21}$$

El método de Pascal se formula de manera general usando la diferencia atrasada $\big(\nabla f\big)(n) = f(n) - f(n-1)$ que tiene a la suma como operación inversa,

$$\sum_{k=1}^{n} \big(\nabla f\big)(k) = f(n) - f(0)\ , \tag{22}$$

excepto por la constante $-f(0)$. El lado izquierdo de (22) es una suma de sumas de potencias y el lado derecho es una «forma cerrada» para la combinación de sumas. Por ejemplo, para evaluar la suma

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2) = 5+8+11+\cdots+(3n+2)\ ,$$

se parte de la diferencia atrasada $\nabla(3k+2)^2 = (3k+2)^2 - (3(k-1)+2)^2 = 6(3k+2)-9$, que al ser sumada en k nos da la identidad,

$$\sum_{k=1}^{n}\big(6(3k+2)-9\big) = (3n+2)^2 - 4\ .$$

Despejando la suma de interés se obtiene el resultado,

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2) = \tfrac{1}{2}n(3n+7)\ .$$

A continuación aplicamos el método de Pascal para derivar relaciones de recurrencia para las entradas de la matriz C, que redundarán en una demostración de la conjetura de Bernoulli.

Lema 5.1. *Para cada $d \in \mathbb{N}_0$ se tiene la recurrencia*

$$C_{p+1,p-d} = \frac{1}{d+1}\binom{p}{d} - \sum_{j=0}^{d}\frac{1}{d+2-j}\binom{p}{d+1-j}C_{p-d+j,p-d}\ , \tag{23}$$

que corre en $p \geq d+1$ a lo largo de la diagonal d ($d=0$ es la segunda, $d=1$ es la tercera, etc.). Para la diagonal principal se tiene que $C_{p+1,p+1} = (p+1)^{-1}$.

Demostración. El punto de partida es la diferencia atrasada

$$\nabla(\ell+1)^{p+1} = (\ell+1)^{p+1} - \ell^{p+1} = \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}\ell^k\ .$$

Sumando en ℓ la diferencia anterior, se obtiene la siguiente identidad

$$(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}\sigma_k(n)\ . \tag{24}$$

A la izquierda la menor potencia es n y la mayor es n^{p+1}. Igualando los coeficientes de la potencia n^j en ambos lados de (24) se obtiene la identidad,

$$\binom{p+1}{j} = \sum_{\ell=j}^{p+1}\binom{p+1}{\ell-1}C_{\ell,j}\ , \tag{25}$$

válida para $j \geq 1$, ya que la menor potencia es n. Para la potencia más alta, $j=p+1$, se obtiene el resultado $C_{p+1,p+1} = (p+1)^{-1}$ para la diagonal principal de C. Despejando en (25) el coeficiente $C_{p+1,j}$ y haciendo los cambios de variables $j=p-d$ y $\ell=m-1$ se obtiene la recurrencia (23). $\square$

Concluimos con la siguiente demostración de la conjetura de Bernoulli.

Lema 5.2. *El polinomio $\sigma_p(n)$ tiene coeficientes,*

$$C_{p+1,p-d} = \mathcal{B}_{d+1} \frac{1}{d+1} \binom{p}{d} , \qquad d \in \mathbb{N}_0 , \quad p \geq d+1 . \tag{26}$$

Los números de Bernoulli los define la recurrencia

$$\mathcal{B}_n = 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m} \mathcal{B}_m , \qquad \text{con } \mathcal{B}_0 = 1 .$$

Demostración. Para demostrar (26) basta con sustituirla en la recurrencia (23) y obtener una identidad. Para hacer la sustitución reescribimos (26), mediante el cambio de variables $j = d+1$ y $\ell = p-d$, como sigue

$$C_{j+\ell,\ell} = \mathcal{B}_j \, \frac{1}{j} \, \binom{j+\ell-1}{j-1} . \tag{27}$$

Una vez hecha la sustitución en (23), una serie de manipulaciones simples nos llevan a que

$$d+2 = \sum_{j=0}^{d+1} \binom{d+2}{j} \mathcal{B}_j . \tag{28}$$

Si recordamos que $\mathcal{B}_j \equiv C_{j,1}$, vemos que este resultado es la identidad (25), con $j = 1$ y $p = d+1$. Para demostrar la segunda parte, la identidad (28) evaluada en $d = n-1$ nos da la recurrencia que define a $\mathcal{B}_n$. □

El método de Bernoulli para el cálculo de los coeficientes se basa en la relación

$$C_{p+1,j+1} = \frac{p}{j+1} C_{p,j} , \tag{29}$$

que deriva del lema 5.2. La regla de suma (17) y la relación (29) proporcionan un método eficiente para calcular las entradas de la matriz C, partiendo del valor inicial $C_{1,1} = 1$.

6. Tres resultados de Faulhaber

Entre los resultados de Faulhaber [6, 7], los tres más conocidos establecen conexiones dentro del conjunto de los polinomios $\sigma_p(n)$. Faulhaber descubrió que para las potencias impares la suma (1) es un polinomio en la variable $x = 2\sigma_1(n) = n(n+1)$ (estos polinomios constituyen el conjunto $\mathcal{J}$) y que para las potencias pares la suma (1) es el producto de $\sigma_2(n)$ por un polinomio en la misma variable $x = 2\sigma_1(n)$ (estos polinomios constituyen el conjunto $\mathcal{F}$). El tercer resultado es una regla de transformación entre los conjuntos de polinomios $\mathcal{J}$ y $\mathcal{F}$.

Faulhaber presenta sus resultados sin demostrarlos [6]. Nosotros seguimos una sugerencia de L. Tits [10, 5] y aplicamos el método de Pascal para demostrar los dos primeros resultados referidos en el párrafo anterior. El tercer resultado es un corolario de los dos primeros.

Lema 6.1. *Para las potencias p impares*

$$\sigma_{2k-1}(n) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k} J_{k,m}\, x^m =: \tfrac{1}{2}J^{(k)}(x) \;, \qquad x = 2\sigma_1(n) = n(n+1) \;, \tag{30}$$

donde los coeficientes $J_{k,m}$ satisfacen la recurrencia

$$J_{p,j} = \frac{1}{p}\Big(\delta_{p,j} - \sum_{k=\underline{k}}^{p-1}\binom{p}{2k-1-p}J_{k,j}\Big) \;, \qquad \underline{k} = \text{máx}\{\lceil\tfrac{p+1}{2}\rceil, j\} \;. \tag{31}$$

Demostración. El método de Pascal (descrito en la sección anterior) y el teorema binomial, aplicados a $f(n) = \big(n(n+1)\big)^p$, nos dan la identidad

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\nabla\big(k(k+1)\big)^p &= \big(n(n+1)\big)^p \equiv x^p \\ &= 2\sum_{k=0}^{p}\frac{1+(-1)^{p-k+1}}{2}\binom{p}{k}\sigma_{p+k}(n) \;.\end{aligned} \tag{32}$$

Recordando a Pascal, la suma en k al lado derecho de (32) es sobre la diferencia $\nabla\big(k(k+1)\big)^p = k^p(k+1)^p - k^p(k-1)^p$. Recorriendo la suma de manera descendente, observamos que los elementos con $k = p$, $p-2$, $\ldots$, son cero y que solo subsisten los elementos que tienen $k = p-1$, $p-3$, $\ldots$. Nos conviene reescribir la suma en (32) avanzando en k de dos en dos y terminando en $k = p-1$, que es el último elemento nonulo. El asunto es que el punto de partida para k depende de si p es número par o impar.

Si p es par, entonces k debe llegar a $p-1$ que es impar y el recorrido parte de $k_0 = 1$, avanzando de dos en dos. Si p es impar se parte de $k_0 = 0$. Así pues, el punto de partida requerido para la suma es $k_0 = 1$ cuando p es par y $k_0 = 0$ cuando p es impar. Recorriendo la suma con $k = k_0 + 2j$, con $j \in \{0, 1, \ldots, (p-1-k_0)/2\}$, terminamos siempre en $p-1$. Adoptando este recorrido en la identidad (32) obtenemos lo siguiente,

$$\tfrac{1}{2}\,x^p = \sum_{k=\underline{k}}^{p}\binom{p}{2k-1-p}\sigma_{2k-1}(n) \;, \tag{33}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	0	1/2								
3	0	−1/6	1/3							
4	0	1/6	−1/3	1/4						
5	0	−3/10	3/5	−1/2	1/5					
6	0	5/6	−5/3	17/12	−2/3	1/6				
7	0	−691/210	691/105	−118/21	41/15	−5/6	1/7			
8	0	35/2	−35	359/12	−44/3	14/3	−1	1/8		
9	0	−3617/30	3617/15	−1237/6	1519/15	−293/9	22/3	−7/6	1/9	
10	0	43867/42	−43867/21	750167/420	−13166/15	2829/10	−2258/35	217/20	−4/3	1/10

Figura 3. Un trozo 10×10 de la matriz J.

donde la suma corre a partir de $\underline{k} = \frac{1}{2}(p + k_0 + 1) = \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$.

La relación (33) es una transformación lineal de los polinomios impares $\sigma_{2k-1}(n)$ a las potencias $\frac{1}{2}x^k$. Los coeficientes en la suma (33) son las entradas $\left(J^{-1}\right)_{i,j}$, con índices $i, j \in \mathbb{N}$, de la correspondiente matriz de transformación J^{-1},

$$\left(J^{-1}\right)_{p,k} = \binom{p}{2k-1-p} , \qquad k \in \{\lceil \tfrac{p+1}{2} \rceil, \ldots, p\} , \quad p \geq 1 , \tag{34}$$

y $\left(J^{-1}\right)_{p,k} = 0$ para otros valores de k. Así que J^{-1} es triangular inferior.

La matriz de transformación (34) es la inversa a la transformación J en (30). La recurrencia (31) para las entradas de J resulta de la identidad $J^{-1}J = 1$, con las entradas de J^{-1} tomadas de (34). □

Los polinomios en la primera clase de Faulhaber son $\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2}J^{(k)}(2x)$. El lema 6.1 da la recurrencia (31) para calcular los coeficientes $J_{k,m}$ de los polinomios $J^{(k)}(2x)$. En la figura 3 se muestran los primeros 10 renglones de la matriz J calculados con (31). Por ejemplo, el sexto renglón son los coeficientes $J_{6,m}$ del polinomio de Faulhaber para la potencia $p = 11$,

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(n) &= \frac{1}{2}\Big(\tfrac{5}{6}(2\sigma_1(n))^2 - \tfrac{5}{3}(2\sigma_1(n))^3 + \tfrac{17}{12}(2\sigma_1(n))^4 - \tfrac{2}{3}(2\sigma_1(n))^5 + \tfrac{1}{6}(2\sigma_1(n))^6\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(5(\sigma_1(n))^2 - 20(\sigma_1(n))^3 + 34(\sigma_1(n))^4 - 32(\sigma_1(n))^5 + 16(\sigma_1(n))^6\Big) . \end{aligned} \tag{35}$$

El polinomio en la segunda línea de (35), en la variable $\sigma_1(n)$, es el que se conoce como polinomio $\mathcal{J}_6(\sigma_1(n))$ de Faulhaber.

El segundo resultado de Faulhaber expresa los polinomios $\sigma_p(n)$ para las potencias pares ($p = 2k$) como el producto de $\sigma_2(n)$ por un polinomio en $\sigma_1(n)$: $\sigma_{2k}(n) = \sigma_2(n)\mathcal{F}_k(\sigma_1(n))$. Los $\mathcal{F}_k$ constituyen la segunda clase de polinomios de Faulhaber.

Lema 6.2. *Para potencias pares, $p = 2k$,*

$$\sigma_{2k}(n) = \frac{1}{2}(2n+1)\sum_{m=1}^{k} F_{k,m}\, x^m =: \tfrac{1}{2}(2n+1)F^{(k)}(x) \ , \qquad x = 2\sigma_1(n) = n(n+1) \ , \quad (36)$$

donde los coeficientes $F_{k,m}$ satisfacen la recurrencia

$$F_{p,j} = \frac{1}{2p+1}\Big(\delta_{p,j} - \frac{1}{p+1}\sum_{k=\underline{n}}^{p-1}(2k+1)\binom{p+1}{2k-p}F_{k,j}\Big) \ , \qquad \underline{n} = \text{máx}\{\lceil p/2\rceil, j\} \ . \quad (37)$$

Demostración. Buscamos la transformación que expresa a los polinomios $(2n+1)n^p(n+1)^p$ como combinaciones de las sumas $\sigma_p(n)$. El método de Pascal nos da la siguiente identidad,

$$\begin{aligned}(2n+1)n^p(n+1)^p &= \sum_{k=1}^{n}\nabla(2k+1)k^p(k+1)^p \\ &= \sum_{k=1}^{n}(2k+1)k^p(k+1)^p - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)k^p(k-1)^p \ .\end{aligned} \quad (38)$$

Antes de sustituir las expansiones binomiales en (38) se hacen los remplazos

$$2k+1 = (k+1)^2 - k^2 \qquad \text{y} \qquad 2k-1 = k^2 - (k-1)^2 \ ,$$

con el fin de mantener al mínimo la diversidad de factores. Una de las dos sumas que resultan de la sustitución tiene un término más que la otra que se separa del resto. Luego se usa la identidad,

$$\binom{p+2}{2k-p} - \binom{p}{2k-p-2} = \binom{p+1}{2k-p} + \binom{p}{2k-p-1}$$

y el término solitario se reparte entre las dos sumas mediante la identidad

$$\binom{p+2}{p_2} = \binom{p+1}{p_2} + \binom{p}{p_2-1} \ ,$$

en el entendido que $\binom{p}{-1} = 0$. El resultado es la transformación

$$\tfrac{1}{2}(2n+1)\, x^p = \sum_{k=\underline{n}}^{p}\left(\binom{p+1}{2k-p} + \binom{p}{2k-p-1}\right)\sigma_{2k}(n) \ , \qquad (39)$$

donde $\underline{n} = \lceil p/2\rceil$ y en el entendido que $\binom{i}{j} = 0$ siempre que $j \notin \{0, 1, \ldots, i\}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1/3								
2	−1/15	1/5							
3	1/21	−1/7	1/7						
4	−1/15	1/5	−2/9	1/9					
5	5/33	−5/11	17/33	−10/33	1/11				
6	−691/1365	691/455	−472/273	41/39	−5/13	1/13			
7	7/3	−7	359/45	−44/9	28/15	−7/15	1/15		
8	−3617/255	3617/85	−2474/51	1519/51	−586/51	154/51	−28/51	1/17	
9	43867/399	−43867/133	750167/1995	−13166/57	8487/95	−2258/95	434/95	−12/19	1/19

Figura 4. Un trozo 9×9 de la matriz F.

Los coeficientes en (39) son las entradas $\left(F^{-1}\right)_{i,j}$, con índices $i, j \in \mathbb{N}$, de la matriz inversa a la segunda matriz de Faulhaber,

$$\left(F^{-1}\right)_{i,j} = \binom{i+1}{2j-i} + \binom{i}{2j-i-1} = \frac{2j+1}{i+1}\binom{i+1}{2j-i} \,, \tag{40}$$

para $i \geq 1$ y $j \in \{\lceil \frac{i}{2} \rceil, \dots, i\}$. Para otros valores de j se tiene que $(F^{-1})_{i,j} = 0$. La recurrencia (37) para las entradas de F resulta de la identidad $F^{-1}F = 1$, usando para la matriz F^{-1} las entradas en (40). $\square$

Los polinomios en la segunda clase de Faulhaber son $\mathcal{F}_k(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{x}F^{(k)}(2x)$, de grado $k-1$. En la figura 4 se muestran los primeros 9 renglones de la matriz F, calculados con la recurrencia del lema 6.2. Por ejemplo, el cuarto renglón de la tabla 4 nos da el polinomio

$$F^{(4)}(x) = \frac{2x}{45}\Big(-3 + 9x - 10x^2 + 5x^3 \Big) \,,$$

que a su vez nos da el polinomio de Faulhaber

$$\mathcal{F}_4(x) = \frac{3}{2x}F^{(4)}(2x) = \frac{1}{15}\Big(-3 + 18x - 40x^2 + 40x^3 \Big) \,,$$

y que a su vez nos da la suma de potencias

$$\sigma_8(n) = \frac{\sigma_1(n)^2}{15}\Big(-3 + 18\sigma_1(n) - 40(\sigma_1(n))^2 + 40(\sigma_1(n))^3 \Big) \,.$$

El tercer resultado de Faulhaber expresa la matriz F como una transformación de la matriz $\underline{J}$, que resulta de eliminar el primer renglón y la primera columna de la matriz J. La matriz $\underline{J}$ se define por sus entradas $\underline{J}_{i,j} = J_{i+1,j+1}$, con índices $i, j \in \mathbb{N}$, y en la tabla de la figura 3 vemos que la matriz J es diagonal a bloques, $J = \mathrm{diag}(1, \underline{J})$. Esta observación se demuestra con la recurrencia (31).

A continuación se deriva una transformación que nos da la matriz F a partir de la matriz $\underline{J}$.

Lema 6.3. *$F = R\ \underline{J}\ L$, donde $R = \operatorname{diag}(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots)$ y $L =$ $\operatorname{diag}(2, 3, 4 \ldots)$.*

Demostración. A partir de la definición de la matriz J^{-1} por sus entradas en (34) vemos que $(J^{-1})_{i+1,j+1} = \binom{i+1}{2j-i} =: (\underline{J}^{-1})_{i,j}$. Sustituyendo este coeficiente binomial en la definición de F^{-1} en (40) resulta la igualdad $(i+1)(F^{-1})_{i,j} = (2j+1)(\underline{J}^{-1})_{i,j}$. Es inmediato verificar que en el lado izquierdo de esta igualdad están las entradas de la matriz LF^{-1} y en el derecho aparecen las entradas de la matriz $\underline{J}^{-1}R^{-1}$, por lo que $LF^{-1} = \underline{J}^{-1}R^{-1}$. □

Agradecimiento

A Gelasio y Edgardo les doy las gracias por su interés expresado en formas diversas.

Bibliografía

[1] J. Bernoulli, *Ars conjectandi*, Bessel, 1973, Existe la traducción al inglés *The art of conjecturing: Together with Letter to a friend on sets in court tenis* de E. Dudley Sylla, Johns Hopkins U Press (2005). https://doi.org/10.3931/e-rara-901.

[2] E. Catalan, «Sur la somme de puissances semblables des nombres natureles. nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série», , vol. 15, 1856, 230–235, http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__230_1.

[3] A. Edwards, *Pascal's arithmetical triangle. The story of a mathematical idea*, Dover republication (2019) of the originally printed by Johns Hopkins UP in 2002.

[4] ———, «Sums of powers of integers: a little of the history», *Math. Gaz.*, vol. 66, 1982, 22–28, https://doi.org/10.2307/3617302.

[5] ———, «A quick route to sums of powers», *The American Mathematical Monthly*, vol. 93, núm. 6, 1986, 451–455, https://doi.org/10.2307/2323466.

[6] J. Faulhaber, *Academia Algebrae, darinnen die miraculosische inventiones zu den höchsten coßen weiters continuirt und profitiert werden*, Augspurg, bey Johann Ulrich Schönigs, 1631, https://doi.org/10.3931/e-rara-16627.

[7] D. Knuth, «Johann Faulhaber and sums of powers», *Mathematics of computation*, vol. 61, núm. 203, 1993, 277–355, https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1993-1197512-7.

[8] D. Pangelly, *Figurate numbers and sums of numerical powers: Fermat, pascal, bernoulli*, New Mexico Sate University, https://www.cs.nmsu.edu/historical-projects/Projects/sums-of-powers-ep3.pdf.

[9] I. Schneider, «Potenzsummenformeln im 17. jahrhundert», *Historia Mathematica*, vol. 10, 1983, 286–296, https://doi.org/10.1016/0315-0860(83)90079-4.

[10] L. Tits, «Sur la sommation des puissances numérique», *Mathesis*, vol. 37, 1923, 353–355.