Miscelánea Matemática **56** (2013) 55–76 SMM

Turing y Gödel en el monte de Sísifo

David Fernández Duque
Grupo de Lógica Computacional,
Universidad de Sevilla,
dfduque@us.es

Vi de igual modo a Sísifo, el cual padecía
duros trabajos empujando con entrambas manos
una enorme piedra. Forcejeaba con los pies y
las manos e iba conduciendo la piedra hacia
la cumbre de un monte; pero cuando ya le faltaba
poco para doblarla, una fuerza poderosa
derrocaba la insolente piedra, que caía rodando a la llanura.
Tornaba entonces a empujarla, haciendo fuerza,
y el sudor le corría de los miembros
y el polvo se levantaba sobre su cabeza.

Homero, la Odisea, canto XI

1. Introducción

La prolífica carrera de Turing tocó a muchas disciplinas científicas, dejando las semillas de brillantes ideas que tendrían que ser desarrolladas en la posteridad por otros que sobrevivieran a su desafortunada muerte. Una de sus aportaciones fue el contenido de su tesis doctoral *Systems of logic based on ordinals* [**13**], realizada en Princeton entre 1936 y 1938 bajo la dirección del renombrado lógico Alonzo Church[1]. Esta tesis tiene que ver con los famosos *teoremas de incompletud* de Gödel, los cuales habían sido descubiertos poco antes y publicados en [**6**]; tanto el artículo de Gödel como la tesis de Turing se pueden encontrar en [**3**].

[1]Solomon Feferman cuenta esta historia con más detalle en [**5**].

Dichos teoremas se ven normalmente como resultados negativos, pues muestran que es imposible dar de una vez por todas un fundamento global e inquebrantable para todas las matemáticas. Sin embargo, Turing vio en ellos no una limitación sino una oportunidad para generar nuevas teorías que trasciendan a las que ya existen.

Así surgieron las *progresiones de Turing*, las cuales son jerarquías de teorías cada una más poderosa que la anterior. Tiempo después serían estudiadas por lógicos como Feferman [**4**] y Beklemishev [**1**] para medir la potencia de teorías formales dentro del esotérico campo del *análisis ordinal*.

Más adelante veremos en qué consisten estas progresiones y los usos que han encontrado, pero primero hablemos un poco del ambiente que había en torno a los fundamentos de las matemáticas en tiempos de Turing.

2. La crisis de fundamentos

A finales del siglo XIX, el optimismo reinaba en la ciencia. Habían habido avances fantásticos en varias disciplinas, y se tenía esperanza de encontrar la "gran teoría" que lo explicara, básicamente, todo.

Esto se derrumbó en los principios del siglo XX, en que se comenzaron a encontrar severas limitaciones en varias ciencias. En la física, el principio de incertidumbre de Heisenberg nos decía que hay una cota fija a la exactitud con la que podemos medir el mundo en que vivimos, y la nueva teoría de la mecánica cuántica amenazaba la visión de un universo que podría ser comprendido y predecido de manera determinista por una teoría fundamental.

En las matemáticas pasó algo parecido, aunque la situación es bastante sutil. Nosotros hoy en día trabajamos con una noción de rigor matemático que parece inflexible, universal, objetiva. Pero esto en realidad es algo muy reciente, pues los matemáticos antes del siglo XIX solían trabajar con objetos determinados intuitivamente y demostraciones que a nuestro parecer son solo esbozadas, o peor, incorrectas.

Es por esto que algunos matemáticos se preocuparon por encontrar fundamentos más estables, lo cual se puede ver en el trabajo de Dedekind, Cantor, Russel y Frege, entre otros; estos esfuerzos son fascinantes y varios de los textos más importantes al respecto están recopilados en [**14**]. El resultado es que cada vez se trabajaba con métodos más rigurosos y, según el consenso de la mayoría de los matemáticos, más correctos.

Esta tendencia tiene una conclusión lógica, a la que llegó Hilbert:

¿Por qué no demostrar rigurosamente que las matemáticas son consistentes? Es aquí que empezaremos a vislumbrar la naturaleza vertiginosa de lo que hablaremos en este ensayo, pues ya aparece una aparente paradoja: ¿de qué nos sirve *demostrar* que lo que *demostramos* es consistente? Al fin, si las matemáticas nos dicen cosas falsas, ¡una de estas cosas podría ser el que ellas mismas son consistentes!

Pero Hilbert no era nada ingenuo, y es por esto que proponía dar esta demostración con elementos "absolutamente confiables", a los que él llama (sin dar una descripción formal) *finitistas.*

Hilbert explora la noción de "finitista" en su ensayo *On the infinite* (reproducido en [**15**]), pero aún hoy no hay consenso sobre una definición rigurosa. Es más fácil señalar argumentos que claramente *no* son finitistas[2] que delimitar de una vez por toda qué principios *sí* lo son.

Independientemente de cómo entendamos la palabra "finitista", los teoremas de incompletud de Gödel representan, en el mejor de los casos, un grave obstáculo para el programa de Hilbert, pues una de sus implicaciones es que ninguna teoría capaz de hacer aritmética elemental puede demostrar su propia consistencia, y mucho menos la de alguna teoría aún más fuerte. Es decir, si queremos demostrar la consistencia de **todas** las matemáticas, ¡tendríamos que aceptar principios ajenos a las matemáticas!

Aquí es buen momento para detenernos a formalizar conceptos, pues los teoremas de Gödel son difíciles de entender y fáciles de malinterpretar.

3. Sistemas de aritmética

Lo primero que necesitamos hacer para enunciar los teoremas de Gödel es escoger un lenguaje formal, al cual llamamos $\mathtt{L}$. Esto nos permitirá estudiar a los enunciados sobre matemáticas como si fueran ellos mismos objetos matemáticos. Como típicamente se hace, trabajaremos con teorías aritméticas en el lenguaje con el símbolo $\mathtt{0}$, el símbolo $\mathtt{S}$ de 'sucesor' (por ejemplo, $\mathtt{S0}$ representa al número 1), símbolos de suma y producto $+, \times$, igualdad $=$, así como operadores de Boole $\neg$ ("negación"), $\wedge$ ("y"), $\vee$ ("o"), $\to$ ("implica") y cuantificadores $\forall$, $\exists$.

Así, un ejemplo de una fórmula puede ser

$$\exists \mathtt{x}(\mathtt{x} = \mathtt{S0}),$$

[2] Por ejemplo, en la demostración de Zermelo de que el conjunto de números reales puede ser bien ordenado; véase su artículo *Proof that every set can be well-ordered* en [**15**].

la cual afirma que hay un número que es el sucesor del cero. En este caso la fórmula es verdadera, pero también puede haber fórmulas falsas, como

$$\forall \mathtt{x} \exists \mathtt{y} \exists \mathtt{z} \big(\neg(\mathtt{x} = \mathtt{y}) \wedge \neg(\mathtt{x} = \mathtt{z}) \wedge (\mathtt{x} = \mathtt{y} \times \mathtt{z})\big),$$

que afirma que todo número es compuesto.

Además de fórmulas, nuestro lenguaje tiene *términos.* Éstos corresponden a nombres de objetos, y se forman a partir de $\mathtt{0}$, $\mathtt{S}$, las variables $\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}, \ldots$ y las operaciones $+, \times$. En particular, a cada número natural n le asignamos un término $\bar{n}$ dado por

$$\bar{n} = \underbrace{\mathtt{SS} \ldots \mathtt{S}}_{n} \mathtt{0}.$$

El término $\bar{n}$ *nombra* a n, pero no es la única manera; por ejemplo, tenemos que el número 2 se puede representar tanto como $\mathtt{SS0}$ o como $(\mathtt{S0}) + (\mathtt{S0})$.

Para esta exposición es mejor trabajar con un lenguaje relativamente sencillo, así que nos quedaremos con el lenguaje L descrito anteriormente. Esto tiene sus desventajas, pues no siempre es fácil, y a veces es imposible, utilizarlo para expresar ideas complejas. En todo caso, esto no tiene por qué ser así; se puede trabajar con lenguajes mucho más ricos, por ejemplo podríamos tener variables para nombrar otro tipo de objetos (números reales, conjuntos,[3] etc.). Los teoremas que vamos a presentar son muy generales y seguirían siendo válidos para teorías que utilizan extensiones de L.

Tenemos ya nuestro lenguaje formal, el primer ingrediente para hacer "metamatemáticas". Ahora, nos interesa describir lo que es un *teorema.* Aquí es en donde hay una mayor diferencia con la práctica, pues para una teoría formal es necesario de antemano dar criterios exhaustivos que dicen exactamente *en qué consiste una demostración.*

Si L es un lenguaje formal del tipo ya especificado, una teoría formal T consiste en un conjunto de *axiomas* y un conjunto de *reglas.* Una demostración de φ es una secuencia de fórmulas de L

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$$

tal que para toda $i < n$, o bien φ_i es un axioma, o bien se sigue de $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}$ mediante las reglas de T.

[3]Casi todas las matemáticas contemporáneas se pueden modelar dentro del lenguaje de teoría de conjuntos, cuyo único símblo no lógico es $\in$. La excepción más notable es la teoría de categorías, cuyos objetos de estudio son demasiado grandes para ser conjuntos.

Si existe tal secuencia de fórmulas, decimos que T *demuestra a* φ o φ es un teorema de T y escribimos $\mathsf{T} \vdash \varphi$. Nótese que hay una gran diferencia entre que φ sea demostrable en un sistema formal y que sea verdadera. Como aquí estaremos intersados en sistemas de aritmética, partiremos del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y nos concentraremos en la *verdad* de fórmulas sobre la estructura

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, s, +, \times \rangle.$$

Escribimos $\mathfrak{N} \models \varphi$ si la fórmula φ afirma una verdad acerca de los naturales (con las operaciones ya mencionadas). La noción de verdad se puede, y debe, hacer más formal; el lógico polaco Alfred Tarski mostró cómo hacerlo en [**11**], pero no entraremos en detalles. Nótese que de igual manera podemos definir distintas estructuras sobre el conjunto $\mathbb{N}$; por ejemplo, si omitimos la multiplicación, Presburger demostró que la teoría de primer orden de $\langle \mathbb{N}, 0, s, + \rangle$ tiene una axiomatización completa (y decidible) [**9**].

Lo menos que esperaríamos acerca de una teoría que haga aritmética es que, si $\mathsf{T} \vdash \varphi$, entonces $\mathfrak{N} \models \varphi$; una teoría con esta propiedad es *correcta.* También nos gustaría tener la implicación contraria, es decir que si $\mathfrak{N} \models \varphi$, entonces $\mathsf{T} \vdash \varphi$; una teoría con esta propiedad sería *completa.* Además, exigiremos que tanto las reglas como los axiomas de T sean *decidibles*, lo cual significa que si tenemos una posible demostración, hay una máquina de Turing[4] capaz de verificar si ésta es correcta. Para ser precisos, *nos gustaría* tener todo eso, pero lamentablemente no puede haber una teoría formal completa y correcta para $\mathfrak{N}$, y es éste el contenido del primer teorema de incompletud de Gödel.

4. El primer teorema de incompletud

Antes de continuar, es importante recordar que en nuestro ensayo, por una *teoría* siempre entenderemos una teoría en el lenguaje de la aritmética de Peano, cuyas demostraciones son objetos finitos verificables por una máquina de Turing. Con esto en mente, el primer teorema de incompletud de Gödel dice así:

Teorema 1 (Gödel)**.** *No existe ninguna teoría sobre* L *u otro lenguaje formal que lo extienda y que sea correcta y completa para la aritmética.*

[4]Esta presentación es anacrónica, pues las máquinas de Turing fueron descubiertas después que los teoremas de Gödel. Aún así, parece apropiada para el presente artículo.

Este teorema nos dice que, para un problema matemático en particular (caracterizar las fórmulas verdaderas sobre la estructura $\mathfrak{N}$ de los números naturales), es teóricamente imposible encontrar una solución general. ¿A qué otro resultado se parece? ¿Quizás algo del mismo Turing?

Recordemos el *problema de la detención*. Éste consiste en determinar si una máquina de Turing se detiene en tiempo finito, o bien entra en un ciclo eterno. Turing mostró que este problema no tiene solución, al menos no una solución computable.

Para escribir esto formalmente requerimos de un resultado particular, a saber, que las máquinas de Turing se pueden enumerar de manera efectiva. Una tal enumeración consiste de una lista

$$M_0, M_1, M_2, \ldots$$

en la que figuran todas ellas.

Entonces, la insolubilidad del problema de la detención dice así:

Teorema 2 (Turing)**.** *No existe una máquina de Turing $P(x, y)$ con la propiedad de que, dada otra máquina de Turing $M_m(x)$ y una entrada n, $P(m, n)$ decide si $M_m(n)$ se detiene en tiempo finito.*

La demostración original de Turing se encuentra en [**12**]. El primer teorema de incompletud de Gödel y la insolubilidad del problema de la detención son dos caras de la misma moneda. De hecho, no es difícil usar el resultado de Turing para demostrar el de Gödel:

Demostración (Primer teorema de incompletud). Si enumeramos las máquinas de Turing de una manera razonable podemos escribir una fórmula $\mathtt{Turing}(m, n, k)$ en el lenguaje de la aritmética que dice

> *La máquina M_m con entrada n se detiene en menos de k pasos.*

Luego, $M_m(n)$ se detiene en tiempo finito si y solo si vale la fórmula

$$\tau(m, n) = \exists k \mathtt{Turing}(\bar{m}, \bar{n}, k).$$

Supongamos ahora que T fuera una teoría completa y correcta de la aritmética, y pensemos en el siguiente algoritmo $\mathcal{A}$:

1. `Definimos` $t = 0$.

2. *a*) `Si` t `codifica una demostración de` $\tau(\bar{m}, \bar{n})$, `regresamos`

``$\mathtt{M_m(n)}$ se detiene''

y finalizamos

b) Si t codifica una demostración de $\neg\tau(\bar{m},\bar{n})$, regresamos

``$\mathtt{M_m(n)}$ no se detiene''

y finalizamos

c) Si no, definimos $t := t + 1$ y volvemos al paso 2.

Éste parece un algoritmo común y corriente; recordemos que, por definición, para cualquier teoría T tenemos una máquina de Turing que revisa las demostraciones de T. Entonces, podemos construir una máquina de Turing M^* que ejecuta el algoritmo $\mathcal{A}$. Como T es completa, el algoritmo siempre termina; como es correcta, realmente resuelve el problema de la detención.

Pero esto es imposible, dado el teorema 2. Concluimos que no puede haber tal teoría T. □

5. La aritmética de Peano

Antes de hablar del segundo teorema de incompletud de Gödel, hablemos de la principal teoría aritmética en que nos concentraremos en este ensayo y con la cual todo matemático se ha tenido que enfrentar en algún momento durante sus años formativos, de una manera u otra; la *aritmética de Peano.* Al menos, yo recuerdo que se me enseñó en la licenciatura. En ese entonces no entramos en detalles sobre los sistemas formales y la lógica, más bien se presentó como una especie de caja de herramientas para demostrar cosas sobre números. Y realmente funciona bien, pues en la práctica no es tan fácil encontrar proposiciones verdaderas que no se puedan demostrar en ella. Para simplificar el sistema es conveniente aceptar cualquier tautología como axioma:

Definición 3. *Una* tautología *es una fórmula φ formada a partir de otras fórmulas $\pi_0, \ldots, \pi_n$ utilizando solo operadores de Boole (es decir, $\neg, \wedge, \vee, \to$) y tal que para cualquier asignación de valores de verdad a las fórmulas π_i, φ resulta ser verdadera.*

Un ejemplo de una tautología es $\alpha \vee \neg\alpha$, la cual es verdadera independientemente del significado que tenga la fórmula α. Aunque el problema de verificar si una fórmula es una tautología no es trivial (es un problema NP-completo), ciertamente es decidible, así que se cumple la condición que hemos impuesto sobre los axiomas de una teoría formal.

Más adelante daremos más axiomas, pero primero enunciaremos una regla de deducción. Las *reglas de deducción* se suelen presentar en la forma

$$\frac{\text{premisas}}{\text{conclusión}}.$$

La primera regla que consideramos se le llama *modus ponens,* y es muy sencilla:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi};$$

si sabemos que φ y que φ implica ψ, entonces sabemos que ψ.

Al haber aceptado todas las tautologías como axiomas, esta regla será la única que utilicemos a nivel puramente proposicional. También necesitamos poder razonar acerca de los cuantificadores; aquí tenemos dos axiomas,

- $\varphi(\mathtt{t}) \to \exists\mathtt{x}\varphi(\mathtt{x})$
- $\neg\forall\mathtt{x}\varphi \leftrightarrow \exists\mathtt{x}\neg\varphi$.

La notación $\varphi(\mathtt{x})$ indica que $\mathtt{x}$ es una variable que aparece en φ sin estar ligada por un cuantificador, y $\varphi(\mathtt{t})$ es el resultado de reemplazar a $\mathtt{x}$ por $\mathtt{t}$. Con el axioma $\varphi(\mathtt{t}) \to \exists\mathtt{x}\varphi(\mathtt{x})$ estamos diciendo *si la propiedad φ es válida para el objeto t, entonces existe un objeto que cumple φ.* Este principio se usa muchísimo en la práctica, pues cuando demostramos que existe un objeto con cierta propiedad casi siempre lo que hacemos es construir un ejemplo particular (aunque no siempre). Por otro lado, el axioma $\neg\forall\mathtt{x}\varphi \leftrightarrow \exists\mathtt{x}\neg\varphi$ no debe requerir de mayor explicación; si no toda x satisface φ, alguna x no satisface φ.

Necesitamos una regla más para manejar los cuantificadores. Esta regla también refleja la práctica matemática; pensemos en un argumento como el siguiente:

Sea x un real arbitrario.

Entonces, x satisface φ porque…

$$\vdots$$

(hacemos algunas cuentas)

$$\vdots$$

> … *como x era arbitrario, concluimos que todo real satisface φ.*

Esto lo podemos modelar formalmente mediante la regla

$$\frac{\varphi(\mathtt{x})}{\forall\mathtt{x}\varphi(\mathtt{x})},$$

donde la variable x en la premisa funciona como un 'objeto arbitrario'.

Hasta aquí hemos descrito lo que es la parte 'puramente lógica' de nuestro sistema formal. Para hacer aritmética, también hay que dar una serie de axiomas que expliquen cómo son los números naturales. Dichos axiomas pueden ser bastante sencillos; con ellos podremos luego inferir propiedades más interesantes.

Los axiomas son:

- $\forall\mathtt{x}(\mathtt{x} = \mathtt{x})$
- $\forall\mathtt{x}\forall\mathtt{y}\forall\mathtt{z}(\mathtt{x} = \mathtt{y} \wedge \mathtt{y} = \mathtt{z} \rightarrow \mathtt{x} = \mathtt{z})$
- $\forall\mathtt{x}\forall\mathtt{y}(\mathtt{x} = \mathtt{y} \leftrightarrow \mathtt{Sx} = \mathtt{Sy})$
- $\neg\exists\mathtt{x}(\mathtt{0} = \mathtt{Sx})$
- $\forall\mathtt{x}(\mathtt{x} + \mathtt{0} = \mathtt{x})$
- $\forall\mathtt{x}\forall\mathtt{y}(\mathtt{x} + \mathtt{Sy} = \mathtt{S}(\mathtt{x} + \mathtt{y}))$
- $\forall\mathtt{x}(\mathtt{x} \times \mathtt{0} = \mathtt{0})$
- $\forall\mathtt{x}\forall\mathtt{y}(\mathtt{x} \times \mathtt{Sy} = (\mathtt{x} \times \mathtt{y}) + \mathtt{x})$

Con esto nos bastará. Ninguno de estos principios debe requerir de mayor justificación para un matemático, pues en realidad son hechos muy elementales acerca de los números naturales (como lo debe ser cualquier axioma).

El último principio que necesitamos es el principio de inducción. También se usa cotidianamente, aunque en realidad es algo mucho más profundo que cualquiera de los principios anteriores:

$$\varphi(\mathtt{0}) \wedge \forall\mathtt{x}(\varphi(\mathtt{x}) \rightarrow \varphi(\mathtt{Sx})) \rightarrow \forall\mathtt{x}\varphi(\mathtt{x}).$$

La *aritmética de Peano,* abreviada AP, es el sistema deductivo cuyas reglas y axiomas son los que hemos mencionado hasta aquí. En una demostración de AP, no se permite apelar a ningún otro principio o método de razonamiento, aunque nuestra intuición nos diga que éste es correcto. Aquí yace la gran diferencia entre las matemáticas de la práctica ordinaria y su modelación utilizando sistemas formales; los sistemas formales son rígidos, no tienen capacidad de introspección e innovación. Una vez que se han planteado los axiomas y las reglas que serán aceptables el sistema formal no se sale de ellas[5]. Las matemáticas de carne y hueso son un proceso dinámico, humano, reflexivo.

Y es esta rigidez lo que lleva a las teorías formales a ser víctimas de los teoremas de Gödel. Nosotros desde fuera podemos ver a una teoría formal como un método para garantizar la verdad de proposiciones aritméticas y por lo tanto tener la convicción de su consistencia, pero para ello tenemos que salir de dicha teoría.

6. El segundo teorema de incompletud

El segundo teorema de Gödel se puede ver como un refinamiento del primero. Para entenderlo, lo primero que hay que observar es que *tanto las fórmulas como las demostraciones se pueden ver como números.* Esta idea suena quizá menos extraña si pensamos en la manera en que una computadora guarda nuestra información, donde cualquier texto que escribamos es representado como una cadena de ceros y unos, es decir, un gran número en sistema binario. Hay varias formas de codificar a las fórmulas como números, pero Gödel propuso una a la que se suele llamar el *número de Gödel* de una fórmula φ, denotado $\ulcorner\varphi\urcorner$.

Si además tenemos una teoría formal T, tenemos (por definición) una máquina de Turing que revisa las demostraciones en T. Las operaciones que hace nuestra máquina de Turing pueden ser descritas como si fueran operaciones aritméticas y por lo tanto con una fórmula $\mathtt{dem}_{\mathsf{T}}(\mathtt{x},\mathtt{y})$ de L que afirma "y es una demostración de x" o, para ser precisos, "el número y codifica una demostración de una fórmula codificada por x". Esto no es nada fácil y requiere de varios elementos; una representación adecuada de nuestras fórmulas como números naturales, una reducción de las operaciones sintácticas relevantes (como la sustitución de una variable por otro término) a operaciones entre números, etc. Éste es un trabajo árduo y minucioso, pero creo que uno se puede convencer que, en principio, se puede hacer. Una vez que tenemos la fórmula $\mathtt{dem}_{\mathsf{T}}(\mathtt{x},\mathtt{y})$, podemos definir la fórmula $\mathtt{Dem}_{\mathsf{T}}(\mathtt{x}) = \exists\mathtt{y}\mathtt{dem}_{\mathsf{T}}(\mathtt{x},\mathtt{y})$, que afirma, "El número x es el código de Gödel de una fórmula demos-

[5]Aún así se pueden demostrar muchísimas cosas usando un buen sistema formal.

trable en T".

Lo que obtenemos así es algo bastante curioso: la teoría T puede entonces "razonar acerca de sí misma". ¿Y qué tiene que decir T acerca de T? Gödel demostró que, en realidad, no mucho.

La pregunta que nos plantearemos es, ¿T puede demostrar que ella misma es *consistente?* Para ser precisos, T es *in*consistente si hay alguna fórmula φ tal que $\mathsf{T} \vdash \varphi$ y $\mathsf{T} \vdash \neg\varphi$; es consistente si no es incosistente.

Ahora, basta con formalizar la consistencia de T dentro de T. Esto se suele hacer de una manera muy particular. Si tenemos que T demuestra una contradicción $\varphi \wedge \neg\varphi$, entonces T demuestra cualquier fórmula ψ, pues $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ es una tautología. Así, para verificar que T es consistente nos basta con encontrar una fórmula que T *no* demuestre. Utilizaremos, pues, un ejemplo que sea de lo más absurdo.

Con esto en mente, definimos

$$\mathtt{Cons}(\mathsf{T}) = \neg\mathtt{Dem}_{\mathsf{T}}(\ulcorner \mathtt{0} = \mathtt{S0} \urcorner).$$

Ahora sí podemos enunciar el segundo teorema de incompletud de Gödel:

Teorema 4 (Segundo teorema de incompletud)**.** *Si* T *es cualquier teoría consistente que extiende a la Aritmética de Peano entonces* $\mathsf{T} \nvdash \mathtt{Cons}(\mathsf{T})$*.*

Este resultado fue un fuerte golpe para el programa de Hilbert, pues uno esperaría que cualquier teoría que formalice una buena parte de las matemáticas utilizadas en la práctica englobe al menos las "matemáticas finitistas" y por lo tanto su consistencia no pueda ser demostrada utilizando este tipo de métodos. Siguen habiendo defensores del finitismo y nuevos intentos de salvaguardar este programa, pero es claro que Gödel les dejó un gran reto que superar.

7. Las progresiones de Turing y los números ordinales

A pesar del pesimismo que a uno le podrían inspirar los teoremas de Gödel, Turing los vio desde el lado amable. Para él, si ninguna teoría formal razonable puede demostrar su propia consistencia, esto nos da un mecanismo para generar teorías más fuertes que sigan siendo correctas.

Para ser precisos, dada una teoría T, definimos T' como la teoría obtenida al agregar a T el axioma $\mathtt{Cons}(\mathsf{T})$. Esta teoría es más fuerte que T, pues $\mathsf{T} \nvdash \mathtt{Cons}(\mathsf{T})$ pero $\mathsf{T}' \vdash \mathtt{Cons}(\mathsf{T})$. Aún así, T' no se escapa de

Gödel y tenemos, a su vez, que $\mathsf{T}' \nvdash \mathtt{Cons}(\mathsf{T}')$... no obstante, podemos entonces considerar $\mathsf{T}'' = \mathsf{T}' + \mathtt{Cons}(\mathsf{T}')$.

¿Cuándo termina todo esto? Pues la realidad es que nunca. Este proceso nos define una cadena infinita de teorías

$$\mathsf{T}_0 \subsetneq \mathsf{T}_1 \subsetneq \mathsf{T}_2 \subsetneq \dots$$

en que $\mathsf{T}_0 = \mathsf{T}$ y $\mathsf{T}_{n+1} = \mathsf{T}'_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Pero la historia aún no se acaba con esta cadena infinita, ya que las progresiones de Turing se pueden extender de manera *transfinita.* Para ver cómo funciona esto, tenemos primero que hablar de los *números ordinales,* que tienen que ver con los buenos órdenes:

Definición 5. *Un orden lineal $\preccurlyeq$ es un* buen orden *si no existe una cadena infinita tal que*

$$x_0 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \dots$$

El ejemplo prototípico de un buen orden está dado por el orden usual de los números naturales. También todo segmento inicial $[0, N]$ está bien ordenado por $\leq$. Los números ordinales son representantes canónicos de los buenos órdenes; cada número natural N representa a $[0, N)$, y al ordinal que representa al conjunto de los números naturales se le suele llamar ω. Todo ordinal tiene un sucesor; $\omega + 1$ representa el buen orden que obtenemos cuando a $\mathbb{N}$ le agregamos ω como un nuevo elemento y estipulamos que $n < \omega$ para cualquier natural $\mathbb{N}$. Es un poco como agregar un punto al infinito. No es difćil convencerse que la estructura que así obtenemos también está bien ordenada.

Continuando de esta manera obtenemos $\omega{+}2, \omega{+}3, \dots$ y si reunimos a todos estos alcanzamos $\omega{+}\omega$, el cual es equivalente a poner dos copias de los naturales, una después de otra.

Los ordinales están, a su vez, bien ordenados, y podemos obtener ordinales más y más grandes iterando las operaciones de sumar uno y recolectar límites:

$$0 < 1 < \dots < \omega < \omega + 1 \dots < \omega + \omega < \dots \omega^2 < \dots \omega^\omega < \dots$$

Este proceso nunca termina, y de hecho hay tantos ordinales que la colección de todos ellos es demasiado grande para formar un conjunto. Los ordinales son muy útiles para describir procesos que se iteran, sobre todo cuando requerimos de iteraciones transfinitas.

Sobre los números ordinales podemos utilizar inducción y recursión de manera muy semejante a los números naturales. Para ser precisos, dado cualquier buen orden $\preccurlyeq$, el principio[6]

$$\forall \mathtt{x}\Big(\big(\forall \mathtt{y} \prec \mathtt{x}\, \varphi(\mathtt{y})\big) \to \varphi(\mathtt{x})\Big) \to \forall \mathtt{x} \varphi(\mathtt{x})$$

es válido y se le llama el *principio de inducción transfinita.*

Volviendo a nuestra secuencia de teorías, podemos aplicar esto a las progresiones de Turing. Definamos

$$\mathsf{T}_\omega = \bigcup_{n<\omega} \mathsf{T}_n.$$

El problema es que, *¡aún esta teoría está sujeta al teorema de Gödel!*

Así, podemos continuar definiendo $\mathsf{T}_{\omega+1} = \mathsf{T}'_\omega$, y nuestra secuencia no se detiene:

$$\mathsf{T}_\omega \subsetneq \mathsf{T}_{\omega+1} \subsetneq \mathsf{T}_{\omega+2} \subsetneq \dots$$

Más generalmente, usando recursión transfinita definimos la *progresión de Turing* de una teoría T de la siguiente manera:

1. $\mathsf{T}_0 = \mathsf{T}$
2. $\mathsf{T}_{\xi+1} = \mathsf{T}'_\xi$
3. $\mathsf{T}_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathsf{T}_\xi$ si λ es un ordinal límite.

Esta progresión tiene ciertas limitaciones, pues es necesrio que el predicado de demostrabilidad de cada teoría de nuestra secuencia se pueda representar en L. Como el lenguaje formal L es enumerable (una limitación de cualquier teoría matemática en la vida real), solamente podemos representar un conjunto enumerable de ordinales en L, así que una progresión de Turing realmente es una secuencia

$$\langle \mathsf{T}_\lambda \rangle_{\lambda<\Lambda}$$

donde Λ es un ordinal cuyos elementos podemos representar utilizando alguna codificación. No entraremos en detalles, solo importa decir que Λ es un ordinal enumerable[7] pero, aún así, puede ser bastante grande.

Las progresiones de Turing se pueden ver como un proceso de introspección. Pensemos que Teodora es una matemática que un día decide de una vez por todas encontrar una teoría formal que englobe todo lo que ella cree que es verdad acerca de la aritmética, al menos aquello

[6] Usamos $\forall \mathtt{y} \prec \mathtt{x}\, \varphi(\mathtt{y})$ como abreviación de $\forall \mathtt{y}(\mathtt{y} \prec \mathtt{x} \to \varphi(\mathtt{y}))$

[7] Para ser precisos, es un ordinal *recursivo,* y por lo tanto está acotado por el ordinal (enumerable) de Church-Kleene que se escribe ω_1^{CK} [**2**].

que puede expresar en L. Entonces un día decide escribir todo lo que, además de poderse escribir en L, le parece debiera figurar como "primer principio" de la aritmética, así como las reglas que le parecen adecuadas y suficientes para hacer deducciones. El resultado de los esfuerzos de Teodora es la teoría T. Ella construyó esta teoría con el afán de demostrar teoremas verdaderos acerca de $\mathfrak{N}$; los axiomas de T son verdaderos y sus reglas son correctas, por lo tanto T no puede demostrar teoremas absurdos como $\mathtt{0} = \mathtt{S0}$. Entonces, Teodora sabe que T es consistente. Pero además, ella conoce los teoremas de incompletud de Gödel, y sabe que T no demuestra su propia consistencia. Esto le da una nueva intuición a Teodora que no había capturado en su primer intento, y decide agregarlo a su lista de axiomas. Así, Teodora define la nueva teoría T' para corregir esta deficiencia.

Pero todo esto parece un poco inútil, pues inmediatamente vuelve Gödel a mostrar que, si bien T' demuestra la consistencia de T, tampoco es capaz de demostrar *su propia* consistencia. Como Sísifo en el monte, el intento de Teodora de encontrar la teoría final de la aritmética siempre se cae al suelo, para tener que volver a empezar desde el principio una y otra vez. ¿A dónde llega, entonces, con todo este esfuerzo?

8. Análisis ordinal de teorías

Las progresiones de Turing parecerían un fracaso si lo único que nos interesara fuera generar una teoría completa. Sin embargo, resultan ser muy útiles para otro fin, pues nos permiten *comparar* teorías.

Hay veces que es fácil comparar dos teorías; S es una extensión de T si todo teorema de T también es teorema de S. En este caso, podemos afirmar inequívocamente que S es al menos tan fuerte como T.

Lo mismo pasa con las figuras geométricas; es muy fácil comparar a dos figuras en el plano si una está ya contenida en la otra, pues la figura contenida debe ser más pequeña. Se puede dar también el caso que dos figuras se encuentren en distintas regiones del plano, pero al transladar a una encaja dentro de la otra. Nuevamente, esto nos dice cuál es más pequeña.

Pero, ¿y si ninguna cabe dentro de la otra? Si tenemos un cuadrado que solapa a un círculo pero cuyas esquinas sobresalen, ¿cuál es más grande? Aquí es importante tener una manera de *medir*. Podríamos utilizar las bien conocidas fórmulas del área de un cuadrado y un círculo, y dejar que el resultado del cálculo determine cuál era más grande.

¿Podemos hacer lo mismo con las teorías formales? Sorprendentemente, sí. Desde luego no tiene mayor sentido asignar un número real a una teoría formal (¿su volumen? ¿peso?), pero sí la podemos medir con un *número ordinal*, su "poder de demostración". Hay varias formas de hacer esto, y una de ellas utiliza progresiones de Turing.

Volvamos a nuestros círculos y cuadrados en el plano. Si queremos medir su área, lo primero que hay que hacer es establecer una *unidad.* En realidad esto funciona por "dedazo"; se escoge un segmento u de recta y se decreta *Este segmento tiene longitud uno.* Luego, se forma un cuadrado cuyos lados son de la misma longitud que u y se decreta *Este cuadrado tiene área uno.* Habiendo hecho esto queda determinada la medida de cualquier figura que podamos dibujar en el plano, y podemos comparar nubecitas con mariposas con corazoncitos sin ningún remordimiento de conciencia.

En el caso de teorías formales pasa algo muy parecido. Primero hay que elegir una "unidad". Esta unidad debe a su vez ser una teoría formal; llamémosla U. Ahora, para medir la potencia de otra teoría T, consideremos el conjunto de ordinales[8] α tales que $\mathsf{T} \nvdash \mathtt{Cons}(\mathsf{U}_\alpha)$. Por meras consideraciones de cardinalidad tiene que haber algún ordinal α en este conjunto, y por lo tanto uno mínimo; a éste lo denotaremos por $\mathrm{ord}_{\mathsf{U}}(\mathsf{T})$. Nótese que, debido al segundo teorema de incompletud de Gödel, la medida de U es cero.

Un caso interesante para analizar es la Aritmética de Peano. Para esto, necesitamos que nuestra teoría U sea bastante más débil, pero no *demasiado* débil, para que nuestro análisis funcione. Un buen candidato resulta ser la *Aritmética Elemental* (AE), la cual es muy parecida a AP salvo que restringimos el principio de inducción a una clase de fórmulas relativamente sencillas.

Una fórmula φ es *acotada* si todos los cuantificadores que aparecen en φ son de la forma $\forall \mathtt{x}(\mathtt{x} < \mathtt{y} \to \psi)$, o bien $\exists \mathtt{x}(\mathtt{x} < \mathtt{y} \wedge \psi)$. Cualquier fórmula acotada es decidible, ya que para evaluar cada cuantificador basta con revisar un conjunto finito de instancias. Con una fórmula acotada no se puede decir "Todo número es la suma de tres primos"; únicamente se pueden afirmar cosas como "Todo número menor a mil es la suma de tres primos". El segundo enunciado lo podemos verificar fácilmente escribiendo un programa o, si estamos muy aburridos, a mano, pero el primero solo se puede verificar mediante una demostración (si es que existe).

Luego, AE es el subsistema de AP en que el principio de inducción

$$\varphi(\mathsf{0}) \wedge \forall \mathtt{x}(\varphi(\mathtt{x}) \to \varphi(\mathtt{Sx})) \to \forall \mathtt{x} \varphi(\mathtt{x})$$

[8]Para ser más precisos, además de una teoría U hay que elegir un buen orden recursivo $\preccurlyeq$ sobre los naturales, el cual utilizaremos para representar ordinales.

se restringe al caso en que φ es acotada. A simple vista no es muy claro que AE sea más débil que AP, pero en realidad es *mucho* más débil; para empezar, AP demuestra la consistencia de AE. Luego, tiene sentido calcular $\mathrm{ord}_{\mathsf{AE}}(\mathsf{AP})$, y de hecho este análisis ya se ha hecho. Aquí mencionaremos el resultado sin entrar en detalles:

Teorema 6.

$$\mathrm{ord}_{\mathsf{AE}}(\mathsf{AP}) = \varepsilon_0 = \lim_{n\to\omega} \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}_{n}$$

Nosotros no nos preocuparemos por cómo se calcula este ordinal, pero esto se puede encontrar en [**1**]. En vez de esto, mostraremos una forma de representar al ordinal ε_0 utilizando árboles finitos. Esto nos dará una forma de visualizar la complejidad de este ordinal.

9. Los árboles finitos y el ordinal ε_0

Un *árbol finito* es un conjunto finito de puntos A con un orden parcial $\preccurlyeq$ tal que existe un elemento mínimo bajo $\preccurlyeq$ (la raíz de A) y, para todas $a, b, c \in A$, si $a \preccurlyeq c$ y $b \preccurlyeq c$, entonces o bien $a \preccurlyeq b$, o $b \preccurlyeq a$. Intuitivamente, si dos ramas del árbol se separan, no se vuelven a unir más arriba.

Como veremos, ε_0 se puede ver como un buen orden sobre el conjunto de árboles finitos. Para ordenarlos, primero nos fijaremos en su altura. La *altura* de un árbol A es el mayor valor de N tal que existe una cadena

$$a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_N.$$

Recordemos que si $a, b \in A$, b es *hijo* de a si $a \prec b$ y no existe c tal que $a \prec c \prec b$. Denotemos por $\mathbb{A}$ el conjunto de árboles finitos[9] y por $\mathbb{A}_N$ el conjunto de árboles finitos de altura a lo más N.

Ahora, ordenaremos $\mathbb{A}_N$ por inducción sobre N. Primero, notemos que hay un único árbol de altura 0; éste está dado por aquel árbol cuyo único nodo es la raíz, y por lo tanto hay un único orden lineal que podemos definir sobre $\mathbb{A}_0$ (el orden total).

Para el paso inductivo, supongamos que hemos ordenado ya al conjunto de árboles de altura a lo más N con un orden $\leq$. Vamos a extenderlo a todo $\mathbb{A}_{N+1}$.

Primero, dado un $A \in \mathbb{A}_{N+1}$ con al menos dos nodos, definamos $\mu(A)$ como el mayor subárbol propio de A; es decir, si r es la raíz de A y sus hijos son $x_1, \ldots, x_n$, entonces sobre cada x_i habrá un subárbol $A_i =$

[9] Identificando, como es habitual, a dos árboles isomorfos.

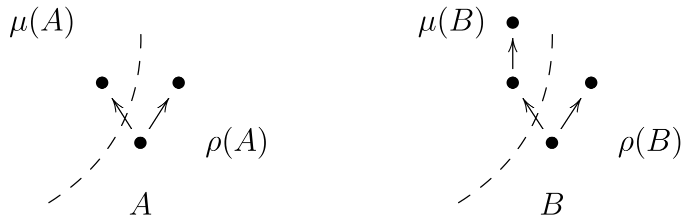

Figura 1: Dos árboles A, B con sus correspondientes partes. Nótese que $\mu(A)$ se repite en A, pero solo borramos una copia.

$\{y \in A : x_i \preccurlyeq y\}$ y $\mu(A)$ es el máximo de estos árboles (recordando que, por inducción, suponemos que $\leq$ es un orden lineal sobre $\mathbb{A}_N$). Luego, definimos $\rho(A)$ como el resto, es decir $A \setminus \mu(A)$. Aquí es importante notar que $\mu(A)$ puede aparecer varias veces dentro de A, pero en este caso solo borramos **una** copia para obtener $\rho(A)$.

Ahora, elijamos $A, B \in \mathbb{A}_{N+1}$. Si ambos tienen altura menor que $N+1$, ya los hemos ordenado antes, así que supongamos que al menos uno de ellos tiene altura exactamente $N+1$. La idea es ordenarlos lexicográficamente según sus subárboles; es decir, primero comparamos el mayor subárbol de A, B, y si estos son iguales comparamos el segundo, etc. Formalmente, $A < B$ si y solo si ocurre una de las siguientes condiciones:

1. A tiene solo un nodo y B tiene más de uno,
2. $\mu(A) < \mu(B)$, o bien
3. $\mu(A) = \mu(B)$ y $\rho(A) < \rho(B)$.

Así, extendemos el orden $\leq$ a los árboles de altura $N+1$, y por inducción, al conjunto de todos los árboles finitos. El orden es lineal por la manera de construirlo. Además, este orden es isomorfo a ε_0; veremos que en efecto es un buen orden. Pero primero, un lema útil que dejaremos como ejercicio para el lector:

Lema 7. *Dado un árbol finito A con más de un nodo, $A > \mu(A)$ y $A > \rho(A)$.*

Esto se muestra por inducción sobre el número de nodos de A, al cual denotamos $|A|$. Ahora, veamos que en efecto tenemos un buen orden utilizando una técnica debida a Nash-Williams [**8**]. Es importante mencionar que este resultado se puede obtener utilizando métodos mucho más elementales, pero la demostración que daremos, además de ser

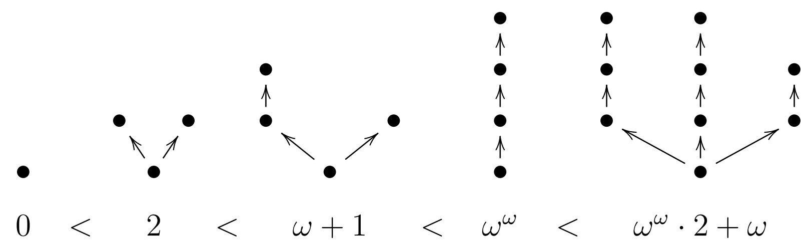

Figura 2: Algunos árboles en orden creciente. El conjunto de árboles finitos con el orden $\leq$ es isomorfo al conjunto de ordinales debajo de ε_0; aunque no daremos el mapeo explícito en este artículo, en la figura hemos indicado los ordinales correspondientes.

muy curiosa, es importante porque se puede adaptar para demostrar el buen orden de ordinales mucho más grandes que ε_0.

El argumento se basa en el método de *secuencias malas:*

Definición 8. *Una secuencia de árboles* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es* mala *si* $A_n > A_{n+1}$ *para toda* n.

La idea es hacer una especie de argumento inductivo sobre las secuencias malas, para lo cual necesitamos una secuencia mala que sea "lo más pequeña posible", en el siguiente sentido:

Definición 9. *Una secuencia mala* $\vec{A}$ *es* crítica *si* $|A_0|$ *es mínimo sobre el conjunto de secuencias malas, y para cada* n *se cumple que, si*

$$A_0 > A_1 > \ldots > A_n > B_{n+1} > B_{n+2} > \ldots$$

es cualquier *secuencia mala, entonces* $|A_{n+1}| \leq |B_{n+1}|$.

Es decir, cada A_n es del menor tamaño posible dadas todas las anteriores. Si existe una secuencia mala, se sigue que existe una secuencia crítica; para construirla, suponemos que hemos elegido $A_0, \ldots, A_n$. Entonces, existe una secuencia mala $\vec{B}$ tal que $B_i = A_i$ para cada $i \leq n$; para una de estas secuencias $\vec{B}^*$ se cumple que $|B^*_{n+1}|$ toma el menor valor posible, y elegimos $A_{n+1} = B^*_{n+1}$. La secuencia infinita $\vec{A}$ que construimos así es mala y no es difícil ver que además es crítica.

Es obvio que ninguna secuencia mala puede contener el árbol unitario (el que solo tiene la raíz), pues no hay ningún árbol menor que éste. Es por esto que, si $\vec{A}$ es mala, podemos definir

$$\mu(\vec{A}) = \mu(A_0), \mu(A_1), \mu(A_2), \ldots$$

además de
$$\rho(\vec{A}) = \rho(A_0), \rho(A_1), \rho(A_2), \ldots$$

Con esto, estamos preparados para demostrar nuestro teorema:

Teorema 10. *El orden $\leq$ es un buen orden sobre el conjunto de árboles finitos.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que existe alguna secuencia mala; entonces, en particular podemos elegir una secuencia crítica $\vec{A}$.

Sea $\vec{B} = \mu(\vec{A})$; tenemos por definición de $\leq$ que

$$B_0 \geq B_1 \geq B_2 \geq B_3 \geq \ldots$$

Como $\vec{A}$ era crítica, $\vec{B}$ no puede tener ninguna subsecuencia estrictamente decreciente, pues si tuviéramos

$$B_{n_0} > B_{n_1} > B_{n_2} > \ldots$$

entonces la secuencia

$$A_0 > A_1 > \ldots > A_{n_0} > B_{n_1} > B_{n_2} > B_{n_3} > \ldots$$

sería mala; aquí estamos usando el Lema 7 que nos dice que $A_{n_0} > \mu(A_{n_0}) = B_{n_0}$. Pero esto no puede ser ya que $\vec{A}$ es crítica y $|B_{n_1}| < |A_{n_1}|$, y $\vec{B}$ no tiene tal subsecuencia. Concluimos que existe un valor de K tal que
$$B_{K+1} = B_{K+2} = B_{K+3} = \ldots$$

Ahora, definimos

$$\vec{C} = A_0, \ldots, A_K, \rho(A_{K+1}), \rho(A_{K+2}), \rho(A_{K+3}), \ldots$$

Aquí vemos que $|C_{K+1}| < |A_{K+1}|$ así que como $\vec{A}$ era crítica, $\vec{C}$ no es mala y tenemos que $C_i \leq C_j$ para algunas $i < j$. Además, se cumple $i \geq K$ pues si no, tendríamos que $A_i \leq C_j = \rho(A_j) < A_j$.

Entonces, $\mu(A_i) = B_i = B_j = \mu(A_j)$, mientras que $\rho(A_i) = C_i \leq C_j = \rho(A_j)$, lo cual implica que $A_i \leq A_j$, contradiciendo nuestro supuesto que $\vec{A}$ era una secuencia mala. Concluimos que no hay tal secuencia, y $\leq$ es un buen orden sobre los árboles finitos. $\square$

Ahí lo tienen; el conjunto de árboles finitos está bien ordenado. Este orden corresponde al ordinal ε_0, la potencia de la aritmética de Peano. Una definición más rigurosa de ε_0 (y de los ordinales en general) se puede encontrar en un texto como [**10**], mientras que el isomorfismo de dicho ordinal al conjunto de árboles finitos se discute, por ejemplo, en [**7**]. Desde luego, mostrar que efectivamente éste es el ordinal de AP requiere de herramientas que van mucho más allá de lo que se puede incluir en este ensayo, pero Beklemishev ha escrito una demostración de la consistencia de aritmética de Peano que utiliza métodos finitistas formalizables dentro de AP junto con **una** inducción transfinita sobre este ordinal. Dado el segundo teorema de incompletud de Gödel, solo podemos concluir que la aritmética de Peano no puede realizar esta inducción.

Más aún, el teorema 10 no se puede escribir tal cual en nuestro lenguaje L, pero esto se puede remediar agregando variables de segundo orden (es decir, variables X que nombran conjuntos de números). Haciendo esto, este teorema nos da un ejemplo de un resultado puramente combinatorio que no se puede demostrar utilizando los métodos de la aritmética de Peano.

10. Conclusiones

Como tantas de las aportaciones de Turing, más de medio siglo después de su muerte estamos apenas comenzando a comprender las implicaciones de esta propuesta que hizo cuando aún era estudiante. El estudio de la aritmética de Peano, sin embargo, es solo la punta del iceberg en el difícil y misterioso campo del análisis ordinal.

La mayor parte del razonamiento matemático que se hace hoy en día emplea métodos que van mucho más allá de AP. Más aún, con los constantes desarrollos y nuevas ideas que van surgiendo en esta ciencia, es difícil, e incluso pareciera arrogante, intentar abarcar todas las matemáticas dentro de un solo sistema formal. Aún así, la realidad es que una parte bastante grande puede ser capturada mediante la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, ZFC (la 'C' es por el axioma de elección, en inglés *choice*). Aquí, además de números naturales uno puede razonar sobre conjuntos de números, y conjuntos de conjuntos de números, y así sucesivamente.

Aunque en la actualidad se estudian teorías aún más fuertes que ZFC, podemos pensar en ZFC como la "gran ballena blanca" del campo. Y, ¿qué tan cerca estamos de lograr calcular el ordinal de ZFC?

La respuesta es sencilla; nada cerca. Ya podemos medir la potencia de teorías bastante más fuertes que la aritmética de Peano, obteniendo ordinales enormes, cada vez más difíciles de describir como lo hicimos con ε_0. Pero la distancia entre las teorías que comprendemos actualmente y la teoría de conjuntos es mucho, mucho mayor que la distancia entre ellas y AP. Muy probablemente, jamás logremos calcular el ordinal de ZFC.

Pero seguimos intentando, y en el proceso se está aprendiendo mucho acerca de las teorías formales, los límites de las matemáticas, y parte del legado que nos dejó Turing para descifrar lentamente.

Bibliografía

1. L. D. Beklemishev, Probability algebras and proof-theoretic ordinals, I, *Annals of Pure and Applied Logic* **128** (2004) 103–124.
2. A. Church y S. Kleene, Formal definitions in the theory of ordinal numbers, *Fundamenta Mathematicae* **28** (1937) 11–21.
3. M. Davis, *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, Dover Publication, 1965.
4. S. Feferman, Systems of predicative analysis, *Journal of Symbolic Logic* **29** (1964) 1–30.
5. ———, Turing's thesis, *Notices of the American Mathematical Society* **53** (2006) 1200–1206.
6. K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **38** (1931) 173–198.
7. H. R. Jervell, Finite trees as ordinals, en *Proceedings of the First international conference on Computability in Europe: new Computational Paradigms*, CiE'05, Springer-Verlag, 2005, 211–220.
8. C. Nash-Williams, On well-quasi-ordering finite trees, en *Classic Papers in Combinatorics*, Modern Birkhäuser Classics, 1987, 329–331.
9. M. Presburger, Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt, en *Comptes-rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves*, 1929, 92–101.
10. W. Sierpinski, *Cardinal and Ordinal Numbers*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1965.
11. A. Tarski, The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics, *Philosophy and Phenomenological Research* **4** (1944) 341–376.
12. A. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society* **2** (1936) 230–265.
13. ———, Systems of logic based on ordinals, *Proceedings of the London Mathematical Society* (1939) 161–228.

14. J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel : A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 2002.
15. ______, *From Frege to Gödel : A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931 (Source Books in the History of the Sciences)*, Harvard University Press, 2002.