Miscelánea Matemática **60** (2015) 25-45 SMM

Del *Ars Conjectandi* al Valor en Riesgo

Begoña Fernández, Beatriz Rodríguez
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
bff@ciencias.unam.mx, beatrizerf@hotmail.com

1. Introducción

Los amantes de lo aleatorio nos vestimos de gala el año 2013 para celebrar los trescientos años de la publicación de una de las más grandes obras de la Teoría de Probabilidad, el *Ars Conjectandi*. Escrito por Jacob Bernoulli —uno de los matemáticos de la familia Bernoulli— es un libro mítico, codiciado por algunos de sus contemporáneos, que solo sabían que Jacob decía tener un método para estimar probabilidades pero que nunca habían tenido la obra completa en sus manos.

Como era habitual en esa época, los problemas matemáticos y las ideas alrededor de éstos se discutían por medio de cartas, mismas que en muchas ocasiones enriquecieron los tratados publicados. De especial importancia para el *Ars Conjectandi* es la correspondencia entre Jacob y Gottfried Leibniz de 1703 a 1704[1], en la que este último expresa su interés en el tema. Muestra de ello es la carta que le envía a Jacob en abril de 1703, que en la postdata dice lo siguiente:

> P.D.: Me entero de que la teoría que yo considero muy importante para estimar probabilidades, ha sido muy cuidadosamente trabajada por ti. Me gustaría que alguien tratara matematicamente varios tipos de juegos, en los que hay claros indicios de esta teoría. Esto sería ameno y útil al mismo tiempo, sin ser indigno de ti ni de ningún otro matemático de gran renombre. He visto algunas de las tesis que propones y no pocas discusiones sobre éstas. Sin embargo, me gustaría tenerlas todas.

La comunicación con Leibniz continuó, aunque nunca le envió su trabajo. Jacob tuvo dificultades para terminar su *proyecto* —como él mismo lo llamaba— debido a la fragilidad de su salud que lo llevó a la muerte a los 50 años de edad. En los últimos años de su vida su sobrino

[1] En las cartas se discuten una gran variedad de problemas matemáticos.

Nicolaus fungió como su secretario, sin embargo, como le comenta a Leibniz en la carta de octubre de 1703, su sobrino no le leía la mente, lo que hacía lenta la escritura.

Así, a su muerte en 1705, el libro no había sido publicado y —dicen las malas lenguas— su esposa lo guardó con recelo, por temor a que cayera en manos de otros miembros de la familia.

No fue sino a raiz del interés de Pierre Rémond de Montmort[2] por la obra —ofrece pagar por ésta, aunque nunca fue aceptada la oferta— que su secretario convenció al hijo de Jacob y a su viuda, de permitirle encargarse de preparar el manuscrito para su publicación, finalmente llevada a cabo en 1713.

La importancia que le daban en esa época a la obra, es puesta en evidencia en la carta que en 1710 Johann Bernoulli[3], desesperado, le escribe a Leibniz:

> Si la Obra póstuma de mi hermano hubiera sido completada y publicada, habría sido sin lugar a dudas única en comparación con cualquier otro trabajo sobre este tema. Sin embargo, dudo que sea publicada por no se qué sospecha absurda de sus herederos.

El libro consta de cuatro partes, la primera está dedicada al trabajo de Huyghens, la segunda es un tratado de combinatoria, en la tercera parte estudia diversos juegos de cartas y dados, y la parte cuatro contiene el primer teorema de Probabilidad, conocido actualmente como La Ley Débil de los Grandes Números[4] de Bernoulli, que en la terminología

[2]Autor de *Essay d'analyse sur le jeux de hazard*, 1708.

[3]Uno de los hermanos matemáticos de Jacob que también tenía comunicación con Leibniz.

[4]Este nombre le fue dado por Siméon Denis Poisson en su *Recherche sur la Probabilité des jugements en matière Criminelle et Civile, 1837.*

moderna dice lo siguiente:

La Ley Débil de los Grandes Números de Bernoulli. *Consideremos una sucesión de experimentos Bernoulli* [5] *independientes con probabilidad de éxito igual a p. Para cada $n \geq 1$, definimos*

$$S_n = \text{ número de veces que ocurre éxito en los } n \text{ experimentos.}$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right] = 1,$$

donde $P[\cdot]$ es la probabilidad de $[\cdot]$.

Este teorema es un resultado de convergencia en probabilidad y quizás no solo es el primer teorema de probabilidad sino el primer teorema de convergencia en medida en la historia. Esto por sí mismo tiene ya su propio valor, pues como es habitual en las matemáticas, una vez que alguien demuestra un teorema, otro le entiende y lo reescribe de un modo comprensible, un ejército de matemáticos trabaja sobre el problema, da ejemplos y contraejemplos, lo mejora, lo generaliza y da condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla. Si es un teorema que se ubica en los reales, se extiende a los complejos, a los espacios de Banach, de Hilbert, de Sobolev, en otras palabras, se crea una hermosa teoría matemática a su alrededor.

La ley de los grandes números no es la excepción. Matemáticos de renombre como Steinhauss, Khintchine, Borel, Chebyshev, Markov, Kolmogorov, Glivenko y Cantelli, entre otros, la trabajaron y hay al menos una ley que lleva el nombre de cada uno de ellos. Los teoremas posteriores son innumerables, existen grandes tratados sobre el tema y aún en nuestros días es una de las líneas de investigación puramente teórica en probabilidad.

Por otro lado, la ley de los grandes números aparece en otras disciplinas tanto aplicadas como teóricas, por ejemplo: es el fundamento teórico del método Monte Carlo que es ampliamente utilizado en distintos contextos; es también la que explica la relación entre la descripción determinista y la estocástica del movimiento de partículas en espacio-tiempo (ver [8]).

Por último, este resultado ha tenido y tiene un gran impacto en estudios poblacionales del sector salud, de la vida social, cultural y económica, entre otras. En nuestros días, es usada —en muchos casos en la versión de Jacob— por los políticos, los hombres de empresa y la sociedad, para estudios de opinión, preferencias, mercadotecnia, entre otros.

[5] Experimentos con dos posibles resultados: éxito o fracaso, el ejemplo por excelencia es el lanzamiento de una moneda.

Nos atrevemos a decir que la Ley de los Grandes Números, es uno de los resultados matemáticos que tienen injerencia en un sinnúmero de problemas aparentemente disímbolos, es algo así como *omnipresente*.

Sin embargo, el *Ars Conjectandi* es mucho más que la demostración de la Ley de los Grandes Números. Para nosotras escribir sobre este libro ha sido una tarea difícil, ya que como bien dice el dicho: *creer saber mucho, perjudica*. El libro ha estado presente en nuestras vidas desde la década de los setenta del siglo XX, lo hemos retomado una y otra vez, incluso tomamos cursos de latín para poderlo leer en su versión original, con la intención de no dar por un hecho alguna(s) de las interpretaciones que conlleva su traducción. Sabemos que si elegimos abrirlo en una página al azar, con probabilidad uno ésta contendrá no solo resultados y comentarios rigurosos y profundos de los que se puede partir para hacer grandes tratados, sino que muchos de ellos son aún en nuestros días motivo de asombro y discusión. El *Ars Conjectandi* se puede estudiar desde distintos puntos de vista y no podríamos seguirlos todos.

En este trabajo intentaremos mostrar que el *Proyecto Jacob* no solo es la demostración de la Ley de los Grandes Números. Bernoulli lo diseñó, por un lado, para demostrar que la característica fundamental de los juegos de azar —en donde se tienen los casos totales y favorables— es una propiedad universal de la naturaleza y que la probabilidad es el marco natural donde se puede estudiar desde el punto de vista matemático a la incertidumbre y, por otro lado, para dar un método y una herramienta con reglas específicas y rigurosas para ser usada en situaciones particulares, aparentemente distintas.

Consideramos que en esto reside la grandeza de Jacob, él —una sola persona— dedicó parte de sus estudios a todos los quehaceres a los que los apasionados de lo aleatorio pueden dedicar sus esfuerzos. Nos referimos a los apasionados de lo aleatorio porque no queremos hacer la diferencia entre probabilistas y estadísticos, entre puros y aplicados, pues por más que lo hemos intentado no hemos podido establecer una clara distinción entre ellos.

Presentamos un muy breve recuento histórico de la probabilidad antes de Bernoulli. Centraremos el trabajo en algunos de los comentarios de Jacob acerca de lo aleatorio o incertidumbre y la probabilidad, y el ejemplo al final del libro con el que ilustra con todo detalle, cómo usar su teorema.

Recurriremos a su correspondencia con Leibniz, pues si bien ésta no influyó en la demostración del teorema, ya que en la carta que le dirige en abril de 1704, Jacob le menciona que la demostración la vio y aprobó su hermano Johann 12 años antes, sí enriqueció el *Ars Conjectandi*, pues

Bernoulli incluye en éste las respuestas a las objeciones que Leibniz había manifestado.

Haremos énfasis en el cuidado que pone a la *precisión* en la aplicación de su teorema, ya que como veremos, es parte de la definición que da de *Ars Conjectandi*. Si bien conservamos la notación original, modificamos un par de expresiones, que creemos, ayudan a entender de manera directa algunos de sus comentarios.

Por último damos un muy breve panorama del riesgo, uno de los problemas contenidos en la propuesta de Jacob, que han dado lugar recientemente a varios problemas matemáticos interesantes y a discusiones entre autoridades y académicos.

El libro y la correspondencia entre Jacob y Leibniz están escritos originalmente en latín, las citas aparecen en el trabajo directamente en español a excepción de los dos primeros párrafos del Capítulo 2 de la Parte Cuatro, pues son la descripción de Jacob del significado de *Ars Conjectandi* y que nos pareció importante presentarlos tanto en la versión original como en la traducción en español. La versión en español es una traducción directa del latín que realizamos con la ayuda de Concepción Abellán. Las cartas que mencionamos a lo largo de todo el trabajo fueron tomadas de [13]. Las ilustraciones son obra de Manolo Fernández.

2. El proyecto Jacob: ¿Misión imposible?

El primer paso del rito de iniciación a la probabilidad es común que sea el estudio de los juegos de azar. Para cada uno de los juegos se calculan las probabilidades de obtener algún resultado y se usa la fórmula de la probabilidad «clásica» $p = r/(r+s)$ que representa el número de casos favorables entre el número de casos totales. En ocasiones se mencionan algunos de los problemas llamados clásicos, que se considera son los que dieron origen a la teoría.

El identificar los inicios, es decir, los momentos, los problemas y las soluciones que antecedieron a la definición y que se consideran claves en el camino de la construcción de la teoría matemática, es una tarea ardua, pues el recorrido histórico para llegar a los axiomas de Kolmogorov es largo y complicado. Más difícil aún es dar una fecha, pues con esto se ignoran los antecedentes que permitieron esta construcción.

Sin embargo, si de dar una fecha se trata, nosotras diríamos que en 1654 se inició la Teoría de Probabilidad. La explicación corta es: 1654 es el año en el que inicia la correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre Fermat alrededor del *Problema de los Puntos*, de donde surge *De raciociniis in Ludo Alae* [7] de Christian Huyghens y es también el año en el que nació Jacob Bernoulli. Una explicación un poco más larga es la que intentaremos dar a continuación.

Desde tiempos inmemoriales, los juegos de azar han sido la actividad lúdica por excelencia, el pasatiempo de algunas culturas, una de las formas de pasar los ratos libres. Para algunos es una actividad hueca, sin ningún contenido, que incluso debería prohibirse pues se asocia al vicio, a los excesos y a la avaricia.

La pregunta obligada es ¿cómo algo de esta naturaleza pudo haber dado origen a una teoría matemática tan sofisticada en la actualidad? Una posible respuesta es que como bien dice el dicho, *las apariencias engañan*, pues esta aparente superficialidad sin sentido encierra —principalmente desde 1654— el concepto de justicia o equidad, que de frívolo no tiene nada.

El *Problema de los Puntos* se refiere a la justicia o equidad en cierto tipo de juegos. Antes de plantearlo discutiremos brevemente esta noción en un juego sencillo. Para facilitar la lectura en lo que sigue la palabra probabilidad estará confinada a $p = r/(r+s)$, es decir, casos favorables entre casos totales.

La primera impresión que se tiene de un juego justo es que todos los jugadores deben de tener la misma probabilidad de ganar. Por ejemplo, si dos personas juegan al lanzamiento de una moneda lo que se espera es que sea honesta, es decir que la probabilidad de que salga cualquiera de las dos caras sea igual a un medio. Cuando se habla de justicia en estos términos, estamos pensando que los jugadores apuestan uno a uno, no se toma en cuenta el capital que puede y/o quiere arriesgar cada uno de ellos, ni su aversión o gusto por el riesgo, entre otras cosas.

Podemos tener otras situaciones, por ejemplo supongamos que Blaise y Pierre juegan a los dados y que a Blaise le encanta el riesgo por lo que está dispuesto a jugar en condiciones de desventaja. Él apuesta a que sale un as en el lanzamiento de un dado y Pierre a que sale cualquiera de las otras caras. Como en todos los juegos cada jugador tiene que pagar por jugar y el ganador se lleva la apuesta total digamos K. La pregunta es ¿cuánto tiene que pagar cada jugador de entrada para que este juego sea justo?

El punto de vista de Pascal y Fermat es que son las probabilidades de ganar las que indican cómo debe repartirse la entrada, es decir, dado que la probabilidad de que Blaise gane es $1/6$ y la de Pierre es $5/6$, Blaise tiene que pagar $K/6$ y Pierre $\frac{5}{6}K$ para jugar.

El *Problema de los Puntos* o división de las apuestas, es un problema de equidad más complicado, muy antiguo y no pretendemos reconstruir toda su historia. Aparece descrito por primera vez en 1494, por Luca Pacioli, en juegos de pelota con apuesta y en un contexto empresarial.

En el juego de pelota considera una serie de partidas entre dos jugadores en cada una de las cuales cada uno obtiene un cierto número de puntos. Se apuesta una cantidad K y el juego se termina cuando un jugador obtiene un puntaje determinado y se lleva la apuesta K. Si el juego se suspende antes de que termine, la pregunta es ¿cómo repartir la apuesta de manera justa?

Pacioli propone tres soluciones y en todas solo toma en cuenta el puntaje de los jugadores al suspenderse el juego. Considera también un juego con tres jugadores y la solución que propone es en el mismo sentido[6].

A grandes rasgos, en el marco de los negocios[7] el planteamiento es el siguiente:

Dos hombres de negocios deciden crear una compañía en la que uno invierte una cantidad a y el otro b, y acuerdan que al año se reparten las ganancias en partes iguales. Si la compañía se disuelve antes del año ¿cómo debe repartirse el total del capital, es decir, la inversión inicial más las ganancias?

Luca Pacioli da una solución en términos de lo que ha pasado hasta la cancelación del contrato y menciona que hay otra, pero nunca la explica.

Este problema, traducido en términos de un juego de azar, se lo plantea Antoine Gombaud Chevalier de Méré a Pascal en 1654. La solución de Pascal es la que da lugar a lo que se conoce ahora como probabilidad condicional y en términos del razonamiento de Huyghens [7], a la esperanza condicional, dos de los conceptos probabilistas más poderosos.

El ejemplo que propone de Méré es el siguiente: Consideremos nuevamente a Blaise y Pierre que juegan ahora al lanzamiento de una moneda

[6] Puede consultarse en la red una traducción al inglés de la parte relevante del problema hecha por Richard J. Pulskamp

[7] pag. 150 y 156 de [12]

honesta bajo las siguientes condiciones: cada vez que se lanza la moneda, se anota un punto el jugador que gana, y el juego se termina cuando alguno de los dos tiene 3 puntos. Supongamos que hay una entrada de K.

Este juego es justo, ambos inician con cero puntos y la probabilidad de ganar de cada uno es $1/2$, por lo que cada jugador pone $K/2$ al inicio. Supongamos que el juego se suspende cuando Blaise tiene dos puntos y Pierre uno, la pregunta es ¿cuál es la forma justa de repartir la cantidad K que dieron de entrada?

Varios autores trabajaron en problemas similares, entre ellos Gerolamo Cardano [3], el razonamiento en todos los casos se centraba en lo que había ocurrido, es decir en el pasado, y algunos mencionan que hay otra forma de verlo mirando al futuro, pero al parecer nunca encontraron cómo hacerlo.

Mirando solo el pasado, podríamos repartir la entrada como $\frac{2}{3}K$ a Blaise que lleva dos puntos y $\frac{1}{3}K$ a Pierre que lleva uno.

La novedad en la solución de Pascal fue el considerar tanto el pasado como el futuro. Esencialmente plantea lo siguiente: dados los puntos que tiene cada jugador al suspender el juego, hay que calcular la probabilidad de que cada uno gane y repartir la entrada como lo hicimos en el ejemplo de Blaise y Pierre, en otras palabras, propone considerar el mismo juego pero partiendo de los puntos que ya tienen y preguntarse, si el juego continuara ¿cuál sería la probabilidad de ganar de cada uno?

En un lanzamiento de moneda, si ganara Blaise, ganaría el juego con probabilidad $1/2$ pues ya tendría los 3 puntos necesarios. Si ganara Pierre, con probabilidad $1/2$ quedarían empatados, estarían igual que al inicio, y cada uno tendría probabilidad $1/2$ de ganar el juego. Así, si denotamos por P_B la probabilidad de ganar de Blaise tenemos

$$\begin{aligned} P_B &= \text{Probabilidad de ganar el juego en un lanzamiento} \\ &\quad + \text{Probabilidad de perder en un lanzamiento y ganar el juego} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

La repartición de las apuestas es $\frac{3}{4}K$ para Blaise y $\frac{1}{4}K$ para Pierre, es decir, es la cantidad en la que podrían vender su lugar en el juego o la que tendrían que pagar para jugarlo. Observemos que la solución mirando el pasado es $\frac{2}{3}K < \frac{3}{4}K$.

A partir de esta solución se establece la correspondencia entre Pascal y Fermat, en la que calculan la repartición de las apuestas en diferentes juegos particulares cada vez más complicados, incluso con más jugadores. En todos los ejemplos hay que calcular casos favorables y desfavorables, que como podemos imaginar, puede ser una tarea muy difícil.

Posteriormente Huyghens razona de otra manera, aunque el resultado es el mismo. Consideremos el primer juego planteado y denotemos por G_B la ganancia neta de Blaise —que puede ser negativa si pierde— supongamos que $q \in [0, 1]$ es el porcentaje por determinar que tiene que aportar Blaise, entonces

$$\begin{aligned} G_B &= \begin{cases} K - Kq, & \text{si sale as,} \\ -Kq, & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} K(1-q), & \text{con probabilidad } p = \frac{1}{6}, \\ -Kq, & \text{con probabilidad } 1 - p = \frac{5}{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Huyghens considera que el juego es justo si es un juego de suma cero en el siguiente sentido:

$$\frac{1}{6}K\,(1-q) - \frac{5}{6}Kq = 0, \text{ esto es, si } \; q = \frac{1}{6}.$$

Desde cualquiera de los puntos de vista el resultado depende de la probabilidad de ganar, es decir, de los casos favorables entre los totales.

Jacob también cayó en la tentación, la primera parte del *Ars Conjectandi* es sobre el trabajo de Huyghens y las dos que le siguen están dedicadas a combinatoria y juegos de azar. Estudia diferentes problemas, algunos planteados por él y otros que eran parte de los juegos de entretenimiento conocidos por los expertos, y en todos ellos cuenta el número de casos favorables y totales.

Podríamos decir que la correspondencia entre Pascal y Fermat, en la que tratan el problema de los puntos, el *De Raciociniis in Ludo Alae* de Huyghens y las tres primeras partes del *Ars Conjectandi*, son tratados sobre el *Arte* [8] *de Identificar y Contar* los casos favorables y totales que nos permitan repartir las apuestas de una manera justa.

La Parte Cuatro del libro que es la que lleva como título *Ars Conjectandi*, es cualitativamente distinta, pues ya no se trata de contar sino de dar un método para ¡¡¡no tener que hacerlo!!!

Todos los capítulos a los que nos referiremos en todo lo que sigue corresponden a la Parte Cuatro del libro.

Los dos primeros párrafos del Capítulo 2 describen lo que llamamos el *Proyecto Jacob* e inicia delimitando lo que va a estudiar, en sus palabras lo que se conjetura:

> *Ea quae certa sunt & indubia, dicimur scire intelligere: caetera omnia conjicere tantum vel opinari.*
>
> Decimos que sabemos o comprendemos lo que es cierto e indudable y que conjeturamos u opinamos sobre todo lo demás.

Todo lo que no es la certeza absoluta, es decir, prácticamente todo, sin importar su naturaleza, es lo que se conjetura. Si bien podríamos pensar que es un poco exagerado, los problemas concretos a los que se refiere, tanto en su correspondencia con Leibniz como en el libro, son de los más variado. Trata desde problemas relacionados con asuntos legales en donde hay diferentes argumentos o evidencias para condenar a una persona, hasta problemas de porcentajes de muertes por enfermedad, calidad del aire y por supuesto los juegos de azar.

Jacob explica con distintos ejemplos, por qué puede poner a todo lo aleatorio en un mismo costal y en todos ellos usa como referencia algún juego de azar.

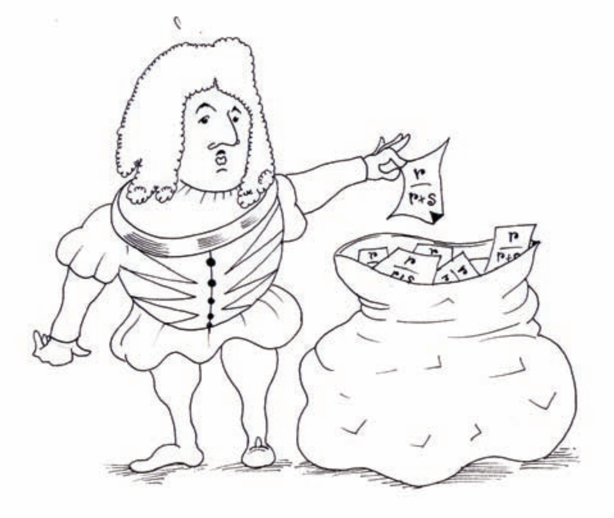
La idea de Bernoulli es que todos los fenómenos aleatorios se comportan como los juegos de azar, es decir, hay casos favorables y desfavorables.

La diferencia radica en que en los juegos de azar los conocemos *a priori*, antes de realizar el juego —por difícil que sea— y en los otros casos aunque existen estas cantidades, están escondidas para nosotros, por lo que no sabemos cuáles ni mucho menos cuántas son.

Continúa diciendo:

> *Conjicere rem aliquam est metiri illius probabilitatem: ideoque Ars Conjectandi sive Stochastice nobis definitur ars metiendi quam fieri potest exactissimé probabilitates rerum,...*
>
> Conjeturar algo es medir su probabilidad y por ello definimos el Arte de Conjeturar o Estocástica como el arte de medir para poder calcular muy exactamente las probabilidades de las cosas ...

[8] Conjunto de preceptos y reglas necesarios para hacer bien algo, en el sentido de Ars en latín.



Este párrafo establece la diferencia con las tres primeras partes del libro, ya no se trata de identificar y contar, sino de medir la probabilidad considerada ya como unidad.

¿Por qué cambia el problema de contar a un problema de medir? En el Capítulo IV discute el problema de calcular el número de casos favorables y dice:

> Sin embargo, quién de entre los mortales determinaría en cualquier momento el número, como si solo fuera el número de casos, por ejemplo de enfermedades que tienen el poder de invadir las innumerables partes del cuerpo humano a cualquier edad y de llevarnos a la muerte ...

y continúa dando otros ejemplos en los que sería muy complicado contar y termina diciendo

> ... Estas situaciones y otras similares, al depender de causas totalmente ocultas que burlarían eternamente nuestras diligencias por la innumerable variedad de combinaciones, hacen que querer conocer algo por este camino sea claramente una locura.

Jacob sabía perfectamente de lo que estaba hablando, la identificación de los casos favorables viendo hacia el futuro en el *Problema de los Puntos*, tomó nada menos que ciento sesenta años y luego ¡había que contarlos! Incluso en el mismo contexto de los juegos, sabía que se podían plantear algunos muy complicados, para los que los cálculos se podían convertir en algo casi imposible.

Cualquiera que le haya echado un ojo al *Ars Conjectandi* puede imaginar perfectamente a Bernoulli escribiendo esto, seguramente devastado por la escritura de las tres primeras partes de su libro y aterrado ante la posibilidad de tener que calcular los casos favorables en los nuevos problemas que le interesaban.

Sin embargo, no se da por vencido y se da cuenta que intentar calcular el cociente directamente es más prometedor, pues hay un método empírico que permite estimarlo o conocerlo *a posteriori*. Reconoce que es algo que él no inventó y que no es nada nuevo. Incluso comenta que desde los hombres más educados y cuidadosos como el autor del libro *L'Art de Penser* [1], hasta las personas con poca educación, no solo saben que funciona, sino también saben que mientras más observaciones se tienen mejor es la aproximación.

Este método empírico es aún en nuestros días parte de la cultura popular. El ejemplo más simple es el del lanzamiento de una moneda honesta. Si lanzamos una moneda muchas veces, esperamos que aproximadamente la mitad de las veces caiga águila y la mitad sol. Más precisamente, si la lanzamos n veces, el número de veces que cae sol entre n es aproximadamente $1/2$, en otras palabras, la frecuencia relativa con la que ocurre sol se aproxima a la probabilidad. Esta información *a posteriori* es la que se obtiene experimentalmente, en términos de juegos, después de haberlos realizado un cierto número de veces.

Jacob, como buen artista[9], tenía una ambición más allá del folclore, como se lo hace saber a Leibniz en la carta de octubre de 1703

> ... Puedo determinar cuántos experimentos hay que realizar para que sea diez, cien, mil, diez mil veces más probable (y finalmente, que sea moralmente cierto) que la razón entre los números de casos posibles que obtengo de esta manera sea legítima y genuina.

La lectura de esta cita es difícil si no se conoce el teorema de Bernoulli, que trataremos en la siguiente sección, aún ahora explicar su significado, es uno de los grandes retos en la enseñanza.

La dificultad radica en que hay dos probabilidades en juego, una la que hay que estimar que es $p = r/(r + s)$, *la razón entre los números*

[9]En el mismo sentido de la palabra Ars en latín.

de casos posibles, y otra que es la que nos dice qué tan buena es la estimación. Era de esperarse que este juego de palabras, sin el resultado matemático, no fuera comprendido con todo detalle por Leibniz, sin embargo, en términos generales, entiende que Jacob dice tener un método muy preciso basado en observaciones para estimar la probabilidad de lo que sea.

En la Carta del 3 de diciembre de 1703, Leibniz escribe

> . . . Tengo dificultades con esa conclusión: algo que puede ocurrir de una infinidad de maneras, no puede ser determinado por un número finito de experimentos, de hecho la naturaleza tiene sus propios patrones, pero solo en general. . .

Jacob le contesta a Leibniz con distintos argumentos en el Capítulo III, pero una de las respuestas más interesantes es la que expresa usando como referencia la extracción de piedras de una urna. Dice así:

> Me ha sido objetado que la proporción de las piedras es una cosa, mientras que la proporción de enfermedades o cambios en el aire, es otra. Argumentan que la primera proporción está bien definida, mientras que la segunda es indefinida y vaga.
>
> Yo respondo diciendo que ambas, en comparación con nuestro conocimiento, son igualmente indefinidas y vagas.

Esta afirmación por contundente que parezca no es el final de la discusión, pues Jacob la retoma en la aplicación de su teorema, esperando quizás que en esos términos sea irrefutable.

Podemos observar que Leibniz no objeta ni el método empírico, ni la definición de probabilidad en general, tiene sus reservas sobre su universalidad. Toca un punto delicado, la posibilidad de una infinidad de posibles resultados. En ese caso la estimación de probabilidades, la considera una *misión imposible*.

3. ¿Qué tanto es tantito?

La Ley de los Grandes Números de Bernoulli es un resultado matemático, puramente abstracto, desprendido completamente de la realidad con el que Jacob pretendía dos cosas: dar un método riguroso para *medir* de manera precisa probabilidades y demostrar, a partir de su teorema, que hay un patrón de comportamiento en todos los fenómenos aleatorios.

Definir una buena medición o estimación, no era una tarea fácil pues la probabilidad es un número entre cero y uno que de entrada es pequeño, ¿qué quiere decir una buena estimación en este contexto? La explicación la encontraremos en su teorema y en la aplicación que presenta al final del libro.

El teorema y los lemas que lo acompañan están escritos con grandes explicaciones y no en el leguaje corto al que estamos acostumbrados, por lo que si bien respetamos su notación, daremos un enunciado en términos modernos.

Teorema de Bernoulli. *Consideremos la repetición de experimentos Bernoulli* [10] *con probabilidad de éxito* $p = r/t,\ t = r + s$ *y sea* S_n *el número de éxitos en* n *ensayos.*

Entonces para cualquier $c > 0$*,*

$$P\left[\left|\frac{S_{Nt}}{Nt} - p\right| < \frac{1}{t}\right] > cP\left[\left|\frac{S_{Nt}}{Nt} - p\right| \geq \frac{1}{t}\right], \tag{1}$$

donde

$$Nt > \text{máx}\begin{cases} m_1 t(t+1)[\ln(r-1) + \ln c] - \frac{st}{r+1}, \\ \\ m_2 t(t+1)[\ln(s-1) + \ln c] - \frac{rt}{s+1}. \end{cases} \tag{2}$$

y

$$m_1 = \frac{1}{[\ln(s+1) - \ln s](s+1)}, \quad m_2 = \frac{1}{[\ln(r+1) - \ln r](r+1)}.$$

La fórmula (1) corresponde exactamente a la demostración de Jacob, sin embargo, se presenta usualmente como

$$P\left[\left|\frac{S_{Nt}}{Nt} - p\right| < \frac{1}{t}\right] > \frac{c}{c+1},$$

que se obtiene directamente de la fórmula (1). En sus argumentos Jacob usa la que más le conviene, como veremos más adelante, por lo que presentamos las dos expresiones[11].

---

[10] En la demostración de la Proposición Principal, le llama fértil a lo que nosotros hemos llamado éxito e infértil al fracaso, para facilitar la exposición usaremos la terminología moderna.

[11] Es común en Estadística usar la siguiente igualdad:

La demostración está basada en contar los casos favorables y desfavorables, es decir, en el cálculo de las probabilidades *a priori*.

Para ilustrar el manejo del teorema, usaremos las cantidades del ejemplo que son $r = 3,\ r + s = 5$. La primera observación que podemos hacer es que para Jacob, la probabilidad p que quiere estimar, está dada como casos favorables entre casos totales y que no pretende calcularla de una manera exacta sino con un error dado por $\pm\frac{1}{t} = \frac{1}{r+s}$. Si se lee superficialmente el enunciado, podría pensarse que una vez con $p = r/(r + s)$, el error está fijo y en este caso sería de $\pm\frac{1}{5}$.

De hecho, este es el error más grande que tiene en mente pues observa que $p = \frac{3}{5} = \frac{3M}{5M}$, de tal manera que podemos tomar $M = 10,\ 100,\ 1000$, para hacerlo más fino. Una vez determinado el error, que él lo hace tomando $M = 10$, es decir, un error de $\pm\frac{1}{50}$, se avoca a discutir la precisión, pero ahora de la $P\left[\left|\frac{S_{Nt}}{Nt} - p\right| < \frac{1}{t}\right]$, conocida como el coeficiente de confianza, (ver [9], pag.).

Evidentemente lo hace en términos de la constante c en la expresión (1) y dice, podría ser 1000, 10000, 100000. Considera primero $c = 1000$ y obtiene que el tamaño de muestra es $Nt = 25550$. Aún cuando es un número grande, él queda satisfecho pues teóricamente el problema está resuelto.

Esta discusión sobre el error y el coeficiente de confianza, es a la que se enfrenta cualquiera que desee aplicar el teorema, es decir, determinar *qué tan* grande debe ser la probabilidad de que p diste *tantito* de S_{Nt}/Nt.

Si bien Jacob menciona que el error lo puede hacer tan pequeño como quiera, no da ningún criterio para establecerlo. Sin embargo, para el coeficiente de confianza, que para él es la certeza moral, en el Capítulo 2 hace un llamado a las autoridades —quizás tenía confianza en ellas por ser suizo— para que determinen cuál es la adecuada:

> Sería de gran ayuda si las autoridades magisteriales determinaran ciertas cotas para la certeza moral. Por ejemplo, podría definirse que 99/100 es suficiente para resolver algo, o cuándo se requiere 999/1000...

Jacob no pudo aplicar su teorema a observaciones ya que nunca tuvo a la mano datos reales. En distintas ocasiones le pide a Leibniz la obra de Johan de Witt, en donde usa la idea de las frecuencias relativas para calcular el precio de las pensiones, así como algunos ejemplos de

---

$P\left[\left|\frac{S_{Nt}}{Nt} - p\right| < \frac{1}{t}\right] = P\left[p \in \left(\frac{S_{Nt}}{Nt} - \frac{1}{t}, \frac{S_{Nt}}{Nt} + \frac{1}{t}\right)\right]$, el intervalo aleatorio $\left(\frac{S_{Nt}}{Nt} - \frac{1}{t}, \frac{S_{Nt}}{Nt} + \frac{1}{t}\right)$ es llamado el 100γ por ciento intervalo de confianza, donde $\gamma = P\left[p \in \left(\frac{S_{Nt}}{Nt} - \frac{1}{t}, \frac{S_{Nt}}{Nt} + \frac{1}{t}\right)\right]$ es el coeficiente de confianza. Un valor determinista de del intervalo $\left(\frac{s_{Nt}}{Nt} - \frac{1}{t}, \frac{s_{Nt}}{Nt} + \frac{1}{t}\right)$ es también llamado un 100γ por ciento intervalo de confianza. (ver [9, p. 377]).

carácter legal en donde él pensaba que podría aplicar su teorema, pero Leibniz nunca le envió nada. Según Devlin [5], en su diario *Meditationes* aparecen al margen comentarios sobre la obra de John Graunt [6], en la que se publican las primeras tablas de mortalidad en la historia. En ellas usa la información semanal publicada cada jueves en Londres sobre el número de muertes y sus causas, sin embargo se especula que Jacob leyó solo un resumen y tampoco tuvo acceso a ésta. Lo sorprendente es que a pesar de no haberlo podido aplicar a la realidad, sabía exactamente cuales eran todos los aspectos finos que requiere una buena estimación, es decir, determinar *qué tanto es tantito* para encontrar, partiendo de esto, el tamaño de muestra adecuado.

El último razonamiento lo hace usando la expresión (1). Si $c = 10^k, k \in N$, entonces de la expresión (2), tenemos

$$Nt > \text{máx} \begin{cases} m_1 t(t+1)[\ln(r-1) + k\ln(10)] - \frac{st}{r+1}, \\ \\ m_2 t(t+1)[\ln(s-1) + k\ln(10)] - \frac{rt}{s+1}. \end{cases}$$

De esta fórmula se obtiene que cada vez que se le aumenta una unidad a la potencia k de 10 el tamaño de muestra crece en una cantidad constante —en el ejemplo la calcula y obtiene que es igual a 5708— y

$$P\left[\left|\frac{S_{Nt}}{Nt} - p\right| < \frac{1}{50}\right] > 10(10)^k P\left[\left|\frac{S_{Nt}}{Nt} - p\right| > \frac{1}{50}\right],$$

pudiendo continuar aumentando k hasta el infinito, lo que lo lleva a la siguiente conclusión:

> ...si continuaran las observaciones de todos los eventos por toda la eternidad (con probabilidad finalmente transformada en certeza perfecta) entonces se observaría que cualquier cosa en el mundo ocurre en cocientes fijos y con leyes constantes de alternancia...

No sabemos si esto convenció a Leibniz, pero al margen de que con su teorema demuestre o no los patrones del comportamiento de la incertidumbre, su Ley de los Grandes Números, además de ser el primer teorema de probabilidad en la historia, dió lugar al primer método riguroso con reglas precisas para *medir* la probabilidad *a posteriori* y abrió las puertas para el estudio sistemático de lo aleatorio.

4. Del Ars Conjectandi al Valor en Riesgo

Así como vimos que el calcular probabilidades en el *Problema de los Puntos* no era solo un divertimento, pues el interés estaba en la justicia o equidad, el *medir* la probabilidad para Jacob tenía también un objetivo que expresa en la última parte del segundo párrafo del Capítulo 2 que dice así:

> *. . . eo fine, ut in judiciis & actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, satius, tutius aut consultius fuerit deprehensum; in quo solo omnis Philosophi sapientia & Politici prudentia versatur.*
>
> . . . con el fin de que podamos siempre elegir o seguir en nuestros juicios y acciones aquello que se aprendiere de manera mejor, preferible, escrupulosa y más reflexionada. Sólo en esto reside la sabiduría de todo filósofo y la prudencia del político.

Este comentario no es poca cosa, pues se refiere a tomar mejores decisiones ante la incertidumbre, que para él tiene un patrón en la naturaleza. Jacob considera que *medir* la probabilidad de lo aleatorio nos da elementos a todos, en especial a los pensadores y a los hombres de estado, para hacerle frente a lo desconocido aunque no podamos explicar detalladamente sus causas.

Para ilustrar la importancia de este comentario, elegimos uno de los temas relacionados con lo aleatorio de gran interés desde siempre y que en la actualidad se conoce como *riesgo*, daremos una breve descripción de algunos de los aspectos que interesan en probabilidad.

En el lenguaje común cuando nos referimos al riesgo, todos imaginamos que estamos ante una situación que no podemos controlar ni conocer y que puede tener consecuencias no gratas. Los ejemplos abundan, los más claros son los terremotos, inundaciones, incendios, caídas de las bolsas o del tipo de cambio, etc.

Estos eventos catastróficos sabemos que se producen cuando se dan simultáneamente una serie de condiciones muy difíciles, si no imposibles de predecir o determinar *a priori*, sin embargo, tenemos información de su comportamiento en el pasado, que se usa en la medición de probabilidades *a posteriori* para mejorar las construcciones, para dar medidas preventivas para la conservación del medio ambiente o para establecer las políticas económicas y monetarias de los países, entre otras.

Ante estas situaciones, que caen claramente en la definición de Jacob, nos preguntamos exactamente ¿qué papel juega la probabilidad?, o ¿para qué sirve medir sus probabilidades?

Para los probabilistas hablar de riesgo, en el caso más simple, no es otra cosa que hablar de una función o variable aleatoria[12] —o función medible— que puede representar, por ejemplo, las pérdidas económicas por los daños de un huracán o un terremoto, las pérdidas financieras ante variaciones del tipo de cambio o de los precios de las acciones en la

[12] Para la definición precisa puede consultarse [9, p. 53].

bolsa de valores. Nos gusta denotarlas por las letras finales del alfabeto X, Y o Z.

Si denotamos por X a la variable aleatoria de interés, deseamos conocer lo que ahora llamamos la función de distribución $F_X : R \to [0,1]$ definida por

$$F_X(x) = P[X \leq x], \quad x \in R,$$

que se lee la probabilidad de que X sea menor o igual que x. Esta función contiene toda la información probabilista de X. Así, el problema de estimar probabilidades de Jacob sigue vigente solo que ahora no estamos interesados en una probabilidad fija, sino en una familia de probabilidades indexadas por x.

El problema que se plantea, conocido como el problema de bondad de ajuste, es el de encontrar la función de distribución de X a partir de variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ con la misma distribución y un método para estimarla *a posteriori*.

Esto no es otra cosa que el *Proyecto Jacob*, que después de 300 años pensamos debería estar resuelto, pero no es así, más bien es uno de los retos más interesantes y difíciles de la probabilidad. En este problema trabajan y han trabajado ejércitos de matemáticos, proponiendo y comparando distintas formas de abordarlo[13].

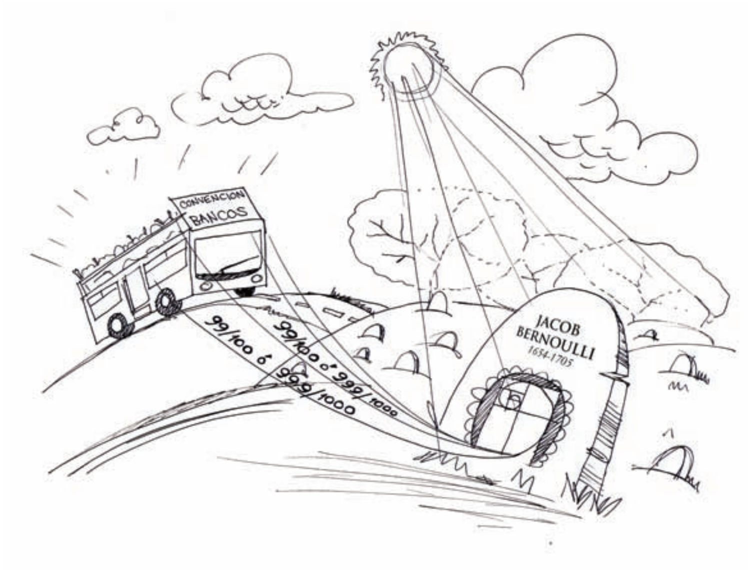
Para ver cómo puede incidir la estimación de la probabilidad en las decisiones, un muy buen ejemplo es el del riesgo financiero. Como todos sabemos es en Basilea, lugar de nacimiento de Jacob, donde se reúnen los financieros de todo el mundo para diseñar las políticas y las reglas de funcionamiento de los organismos financieros del mundo globalizado. En particular, uno de los temas a discutir es el riesgo en que viven tales instituciones, y se han dado a la tarea de diseñar medidas de riesgo, que den la pauta para regularlos.

Todo parece indicar que en una de estas reuniones, organizaron una visita guiada para los reguladores al sepulcro de Jacob y él, ni tardo ni perezoso, les recordó que ya desde la publicación de su libro en 1713, es del dominio público que ha solicitado a las autoridades que establezcan cuál es la certeza moral y les sugiere que decidan entre 99/100 ó 999/1000. Al parecer lo escucharon, pues las reglamentaciones internacionales incluyen el cálculo del Valor al Riesgo ($VaR_{.99}$ ó $VaR_{.999}$) cuya definición en el caso más simple es la siguiente:

Sea X una variable aleatoria, con función de distribución F_X invertible, entonces el $VaR : [0,1] \in R$ está definido por

$$VaR(q) = VaR_q = F_X^{-1}(q),$$

[13]En México, Federico O'Reilly ha dedicado su vida a este problema y ha obtenido grandes resultados en el área. Ver por ejemplo [11].



es decir, es la imagen inversa de q, por lo que

$$F_X(VaR_q) = P[X \leq VaR_q] = q$$

Los tratados de Basilea plantean que las instituciones financieras tienen la obligación de calcular el $VaR_{.99}$ en algunos casos, y el $VaR_{.999}$ para otros, y tomar las medidas adecuadas para proteger sus capitales contra pérdidas menores o iguales a estas cantidades. En caso de cumplirse estas condiciones las posibles pérdidas mayores que el $VaR_{.99}$ o $VaR_{.999}$, que son para las que no están obligados a cubrirse, tienen probabilidad de ocurrir .001 y .0001 respectivamente, lo que podríamos considerar moralmente aceptable.

Sin embargo, el problema práctico que se plantea es muy difícil ya que no se conoce la función de distribución de las pérdidas y solo se puede estimar *a posteriori*, es decir a partir de la información disponible.

Las instituciones funcionan bien en general, se tienen pocas observaciones de crisis, así es que la información disponible para estimar la función de distribución $F_X(x)$ para x grande es escasa.

En este tipo de problemas no se trata de encontrar el tamaño de muestra, sino de encontrar métodos que funcionen con la información disponible para poder tomar mejores decisiones en el manejo del riesgo. La discusión sobre si el VaR es la medida adecuada está candente, basta ver el documento [4] que académicos especialistas en el tema dirigen al Comité de Basilea.

Jacob no pudo darse cuenta de la magnitud de este problema pues nunca tuvo datos reales a su disposición.

5. Epílogo

El *Ars Conjectandi* no fue entendido en toda su profundidad por sus contemporáneos a excepción de su sobrino Nicolaus, quien publicó en 1709 *De Usus Artis Conjenctandi in Jure* en el que según Devlin [5], discute varios de los problemas planteados por Jacob y las tablas de mortalidad de Graunt. El transformar el problema de contar al de medir la probabilidad, fue realmente uno de los mayores aciertos, pues abrió las puertas al estudio de la incertidumbre. La polémica con Leibniz sobre la posibilidad de una infinidad de posibles resultados quedó resuelta con la formulación axiomática de la probabilidad dada por Kolmogorov, pues ésta incluye la posibilidad de eventos de probabilidad cero distintos del evento imposible.

Es difícil decir qué fue más importante si las definiciones de probabilidad y esperanza condicional o el trabajo de Jacob, sin embargo, sí sabemos que cuando se juntan producen resultados sorprendentes.

Ejemplos de la unión de la Ley de los Grandes Números y la probabilidad o la esperanza condicional son el método Monte Carlo con reducción de varianza (ver [2]), o los métodos de valores extremos para ajustar distribuciones (ver, por ejemplo el método POT en [10]).

Aún más, la idea de Jacob de encontrar *a posteriori* lo que no conocemos *a priori*, da lugar junto con la probabilidad condicional, a la estadística bayesiana.

En ésta se propone una distribución *a priori*, a sabiendas de que no es la buena, y un método recursivo basado en la fórmula de Bayes, cuyo corazón es la probabilidad condicional, para aproximar *a posteriori* la distribución desconocida.

Pero quizás lo más importante es que el quehacer de la comunidad de lo aleatorio no es otra cosa que el *Proyecto Jacob*, pues en ella están los que demuestran los teoremas abstractos, los que los transforman en algo más aplicable, los que desarrollan las técnicas específicas, los que elaboran los sistemas de cómputo para obtener resultados *a posteriori*, y los que los usan para medir las probabilidades con el fin de elegir o seguir en sus juicios y acciones lo más reflexionado, preferible y mejor.

Lo único que está por verse es la prudencia de los políticos.

Agradecimientos

Quisiéramos agradecer a Carlos Álvarez el tiempo que dedicó a rastrear las cartas que nos interesaban en las obras completas de Leibniz, en donde aparecen en forma desordenada y en bajar el original del *Ars Conjectandi* de google books pues aunque lo tenemos, lo guardamos tan bien que no lo encontramos. Por el interés y la paciencia que nos tuvieron él y Carmen Martínez al escucharnos hablar de Jacob, por sus atinados comentarios como expertos que son en historia de las matemáticas que enriquecieron sin lugar a dudas el trabajo. Nuestra gratitud a Concha Abellán por las estupendas tardes que pasamos con ella en las que de la forma más desinteresada posible, no solo nos ayudó a traducir todas las citas que aparecen en el trabajo, sino que nos permitió disfrutar de su gusto y su maestría en el manejo de la lengua. A Manolo Fernández, *el artista*, a quien presionamos para que hiciera las ilustraciones a toda prisa, dejándonos maravilladas al ver en acción a alguien que maneja la proporción áurea con una gran naturalidad. De forma muy especial a Rafael Martínez quien en cuanto fue publicado el libro de Devlin [5], nos lo hizo saber de inmediato y nos motivó a retomar nuevamente la obra de Jacob. Por último al árbitro anónimo cuyas observaciones y sugerencias mejoraron el trabajo, especialmente por la referencia del juego de pelota en el libro de Luca Pacioli y su traducción en la red.

Bibliografía

[1] A. Arnauld y P. Nicole, *La Logique, ou L'Art de Penser*, E. F. Savoye, 1683.

[2] S. Asmussen, «Large Deviations in Rare Events Simulation: Examples, Counterexamples and Alternatives», en *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2000*, eds. Kai-Tai Fang *et al.*, Springer Berlin Heidelberg, 2002, 1–9.

[3] G. Cardano, *Liber de Ludo Alae*, 1663.

[4] J. Danielsson, P. Embrechts, C. Goodhart, C. Keating, F. Muennich, O. Renaul y H. S. Shin, «An Academic Response to Basel II», *LSF Financial Markets Group an ESRC Research Centre*, 2001, , Special Paper N0. 130.

[5] K. Devlin, *The Unfinished Game*, Basic Books, New York, 2008.

[6] J. Graunt, *Natural and Political Observations, made upon the Bills of Mortality*, Londres, 1662.

[7] C. Huyghens, *De Raciociniis in de Ludo Alae*, 1656.

[8] A. Martin-Löff, «Limit Theorems for the Motion of a Poisson System of Independent Markovian Particles with High Density», *Z. Wahrsch. Geb.*, vol. 34, 1976, 205–223.

[9] A. M. Mood, F. A. Graybill y D. C. Boes, *Introduction to the Theory of Statistics*, 3.ª ed., Mc Graw Hill, 1974.

[10] A. M. Neal, F. Rüdriger y P. Embrechts, *Quanitative Risk Management, Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press. Princeton, Oxford, 2005.

[11] F. J. O'Reilly y M. A. Stephens, «Characterization and Goodness-of-fit Tests», *Jour. Roy. Statist. Soc. (B)*, vol. 44, núm. 3, l982, 353–360.

[12] L. Pacioli, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, Venecia, 1494.

[13] G. W. L. F. von) y K. G. Karl Immanuel Gerhardt, «Leibnizens mathematische schriften: Briefwechsel», 2011.